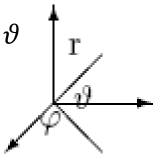
Analysis – Prüfungsunterlagen

Dino Wernli, Fabian Hahn, Stefan Götschi

Juli 2008

1. Koordinatentransformation

Kugelkoordinaten (r, φ, ϑ)



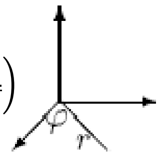
$x = r\cos\varphi\cos\vartheta$; $y = r\sin\varphi\cos\vartheta$; $z = r\ \sin\vartheta$

$r = \sqrt{x^2+y^2+\ z^2}$; $\vartheta = \arg\left(\sqrt{x^2+y^2}, z\right)$;

$\varphi = \arg(x,y) = \pm\cos^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ (je nach y)

Integralkompensation: $dxdydz = r^2 cos\vartheta\ drd\varphi d\vartheta$

Zylinderkoordinaten (r, φ, z)



$x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$; $z = z$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$; $\varphi = \arg(x,y) = \pm\ \cos^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

Integralkompensation: $dxdydz = r\ drd\varphi dz$

2. Komplexe Zahlen

Allgemeines

$\sqrt{-1} = i \rightarrow -\frac{1}{i} = i$; i ist die imaginäre Einheit

$z = a + bi$; $\bar{z} = a - bi$; $Re(z) = a$; $Im(z) = b$

Rechenregeln

für $z = a + bi$ und $x = c + di$ gilt:

- $z \pm x = (a \pm c) + (b \pm d)i$
- $z \cdot x = (ac - bd) + i(bc + ad)$
- $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$
- $\frac{1}{x} = \frac{\bar{x}}{|x|^2} \rightarrow \frac{z}{x} = \frac{z \cdot \bar{x}}{|x|^2}$
- $z \cdot n = na + i\,nb$
- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$
- $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$; $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$
- $\overline{z \pm x} = \bar{z} \pm \bar{x}$; $\overline{z \cdot x} = \bar{z} \cdot \bar{x}$
- $|z \cdot x| = |z| \cdot |x|$; $Re(z) \leq |z|$; $Im(z) \leq |z|$
- $|z + x| \leq |z| + |x|$ Dreiecksungleichung

Polarform

Definition und Rechenregeln:

$z = a + bi = re^{i\varphi} = r(cos\varphi + isin\varphi)$

- $me^{i\varphi} \cdot ne^{i\theta} = m \cdot n \cdot e^{i(\varphi+\theta)}$
- $\left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{ni\varphi}$

Komplexe Wurzel (Kreisteilungsgleichungen):

$$z^4 = -8 + 8\sqrt{3}\,i = 16e^{i\left(\frac{2}{3}\pi+2\pi k\right)}$$

$$z = \sqrt[4]{16} \cdot e^{\frac{i}{4}\left(\frac{2}{3}\pi+2\pi k\right)} = 2e^{i\left(\frac{1}{6}\pi+\frac{1}{2}\pi k\right)}$$

Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom in $\mathbb{C}$ von Grad n besitzt genau n Nullstellen, wobei mehrfache Nullstellen mehrfach gezählt werden: $(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$

Falls die Koeffizienten alle reell sind, gilt:

$$p(z_0) = 0 \leftrightarrow p(\overline{z_0}) = 0$$

3. Funktionen

Erscheinungsform

$f: A \rightarrow B$; $x \mapsto f(x)$; $A = dom(f)$; $B = range(f)$

$im(f) = \{y \in B \mid \exists x \in A: f(x) = y\}$

Vektorwertige Funktionen:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$; $f(t) = [\,f_1(t), \dots, f_n(t)\,]$

Skalarwertige Funktionen:

$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; $f(t_1, \dots, t_n) = c$

Funktionalgleichungen

Gleichungen, die das Verhalten von Funktionen beschreiben. DGL sind spezielle Funktionalgleichungen.

Beispiel einer Funktionalgleichung: $f(a)f(b) = f(a + b)$

Eine Lösung wäre zum Beispiel: $f(x) = \exp(x)$

Eigenschaften von Funktionen

- **Monotonie:** $x_1 > x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$,
  andere Bedingung: $f'(x) \geq 0 \quad \forall x$
- **Strenge Monotonie:** $x_1 > x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$,
  andere Bedingung: $f'(x) > 0 \quad \forall x$
  Strenge Monotonie $\rightarrow$ Injektivität
- **Surjektivität:** mindestens ein x für jedes y
  $f: A \rightarrow B$; $Im(f) = B$
  $\forall y\ \exists x\ y = f(x)$
- **Injektivität:** höchstens ein x für jedes y
  $f(x_1) = f(x_2) \leftrightarrow x_1 = x_2$
- **Bijetivität:** genau ein x für jedes y
  Surjektivität + Injektivität
- f bijektiv $\rightarrow$ $f^{-1}: im(f) \rightarrow dom(f)$ existiert
- Gerade Funktion: nur gerade Potenzen $\rightarrow$ symmetrisch zur y-Achse: $f(x) = f(-x)$
- Ungerade Funktion: nur ungerade Potenzen $\rightarrow$ symmetrisch zum Ursprung: $-f(x) = f(-x)$
- Jede Funktion ist eine eindeutige Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion:
  $$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{gerade}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{ungerade}}$$
- Sei $f: A \rightarrow B$ und $g: B \rightarrow C$, dann ist $g \circ f = g(f(x)): A \rightarrow C$

Funktionen mit Beträgen

Manche Funktionen, die sich als Fallunterscheidung linearer Terme darstellen lassen, kann man mit Beträgen vereinfachen. Vorgehen an einem Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & x>1 \\ 0 & -1 \le x \le 1 \\ -x-1 & x<-1 \end{cases}$$

Ansatz: Linerakombination von Beträgen, welche die Bruchstellen als Nullstelle besitzen:

$$f(x) = a \cdot |x-1| + b \cdot |x+1| + c$$

Fälle einsetzen, Koeffizientenvergleich liefert Lösung:

$$f(x) = \frac{1}{2}|x-1| + \frac{1}{2}|x+1| - 1$$

Stetigkeit von Funktionen

Elementare Funktionen wie $+, *, e^a, \sin a$ und deren Zusammensetzungen sind differenzierbar (also stetig).

Stetigkeit

$f: A \to \mathbb{R}$ heisst stetig in x_0, falls:
$\forall \varepsilon > \ \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A: |x - x_0| < \ \delta \to \ |f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon$

Lipschitz-Stetigkeit

$f: A \to \mathbb{R}$ heisst Lipschitz-stetig auf A, falls:
$\exists C, \ \forall x, x_0 \ \in A: \ \ |f(x) - f(x_0)| \le C|x - x_0|$

Jede Lipschitz-stetige Funktion ist stetig. Zum Beweis der Lipschitz-Stetigkeit ist folgende Formel nützlich:

$$\forall x: |f'(x)| \le C \quad \to \quad |f(x_1 - x_2)| \le C(x_1 - x)$$

Lokale Lipschitz-Stetigkeit

$f: A \to \mathbb{R}$ heisst lokal Lipschitz-stetig, falls:

$$\forall z_0 \in A\ \exists \delta > 0\ \exists c > 0\ \forall z \in A: |z - z_0| < \delta \\ \to |f(z) - f(z_0)| \le c \cdot |z - z_0|$$

Zusammensetzungen von lokal Lipschitz-stetigen Funktionen sind lokal Lipschitz-stetig.

Weitere Sätze

$f: A \to \mathbb{R}$ ist stetig in x_0, falls rechts- und linkssstetig:

$$\lim_{x \to x_0+}(f) = \ \lim_{x \to x_0-}(f) = f(x_0)$$

Umkehrfunktionen und Zusammensetzungen von ste-tigen Funktionen sind stetig.

$f(t) = [\, f_1(t), \dots, f_n(t)\,]$ ist stetig genau dann, wenn $f_1(t), \dots, f_n(t)$ alle stetig sind.

Zwischenwertsatz

Sei $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) < 0$ und $f(b) > \ 0$ dann besitzt f mindestens eine Nullstelle in $[a, b]$

Folge: eine stetige Funktion $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ jeden Wert an zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

4. Zahlenmengen

Offene und abgeschlossene Mengen

$a \in A$ heisst **innerer Punkt** von A wenn eine Vollkugel $(r > 0)$ mit Zentrum a existiert, die vollständig in A liegt. Das **Innere** A^0 von A ist die Menge aller inneren Punkte.

Menge A heisst **offen**, wenn sie nur aus inneren Punkten besteht $\leftrightarrow \quad A = A^0$
Beispiele: (1,3) oder $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 7\}$

Der **Abschluss** $\bar{A}$ von A ist die Menge aller Punkte, um die eine noch so kleine Vollkugel $(r > 0)$ A schneidet.

$a \in X$ ist ein **Randpunkt** von A, wenn jede noch so kleine Vollkugel um a sowohl A als auch $X \backslash A$ schneidet. a muss NICHT in A sein!

Die Menge aller Randpunkte von A heisst $\delta(A) = \bar{A} \setminus A^0$.

Eine Menge $B \subseteq A$ mit $A \subseteq \bar{B}$ heisst **dicht** in A

Die Menge A heisst **abgeschlossen**, falls alle Randpunkte von A in A liegen: $\delta(A) \subset A$ bzw. $A = \bar{A}$

$A \subset \mathbb{R}^m$ heisst **kompakt**, falls sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Anmerkung: [2,3] ist weder offen noch abgeschlossen!

Extrema von Mengen

Jede endliche Menge nimmt ein **Maximum** und ein **Minimum** an.

Sei $M \subset \ \mathbb{R}$ und $s \in M = \max(M)$: $\forall y \in M: \ y \le s$
$\to$ analoge Definition gilt für $\min(M)$

Für unendliche Mengen, wie offene Intervalle, führt man **Infimum** $\inf(M)$ und **Supremum** $\sup(M)$ ein:
$\sup(M) = \delta$, $\nexists y \in M$ mit $y > \delta$, und $\forall \varepsilon > 0, \exists y \in M$ mit $y > \ \delta - \varepsilon$. Analoge Definition für Infimum.

Notation: $C = \{f(x) | x \in B\}$ Menge und $f(x): B \to C \quad \to \quad \inf C = \inf_{x \in B} f(x)$

Konvention: $\sup \emptyset = -\infty; \ \ \inf \emptyset = \infty$

Jedes Intervall in $\mathbb{R}$ besitzt ein Infimum und ein Supremum. Falls diese im Intervall liegen, stellen sie Maximum und Minimum dieses Intervalls dar.

Die Menge aller Stellen, wo das Maximum angenommen wird heisst **Maximalstellen** S_{max}. (Analog für Minimum)

5. Grenzwerte

Definitionen

$f: A \to \mathbb{R}^m$ hat bei $a \in A$ den Grenzwert $b \in \mathbb{R}^m$, falls:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A: 0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - b| < \varepsilon$$

Schreibweise: $\lim_{x \to a} f(x) = b$

Rechtsseitiger/linksseitig Grenzwert $\lim_{x \to x_0 \pm} f(x)$.

Existiert ein Grenzwert, so ist dieser eindeutig bestimmt.

Uneigentliche Grenzwerte

$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$,
falls $\forall N\ \exists\delta > 0\ \forall x \in A: 0 < |x-a| < \delta \to f(x) > N$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$,
falls $\forall\varepsilon > 0\ \exists M: \forall x \in A: x > M \to |f(x) - b| < \varepsilon$

Regel von Bernoulli – de l'Hôpital

Seien f, g diff'bar und entstehe bei $\lim_{t\to b} \frac{f(t)}{g(t)}$ ein undefinierter Ausdruck wie $\frac{0}{0}$ oder $\pm\frac{\infty}{\infty}$, so gilt:

$$\lim_{t\to b} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t\to b} \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

Wenn BdH nicht anwendbar ist, können einige Umformungen weiterhelfen:

$$\lim_{t\to\infty} t^2 \sin\left(\frac{2}{t^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}(\sin 2x^2)$$

Rechenregeln für Grenzwerte

Sei $\lim_{x\to a} f(x) = b$ und $g(y)$ stetig in b, dann gilt:

$$\lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)$$

Ist zusätzlich $\lim_{y\to b} g(y) = c$, dann gilt:

$$\lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) = c$$

Majorandenkriterium: falls $\lim_{x\to p} g(x) = 0$ und $|f(x)| \le c \cdot g(x)$, dann gilt: $\lim_{x\to p} f(x) = 0$

Asymptotische Kurven

Zwei nach rechts unbeschränkte Funktionen f und g heissen asymptotisch, falls: $\lim_{x\to\infty} f(x) - g(x) = 0$

Ist eine lineare Funktion $g(x) = mx + q$ asymptotisch zu f, so heisst g Asymptote von f.

Berechnung einer Asymptote $g(x) = mx + q$ besitzt:
$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$; $q = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx)$

Berechnung asympotisher Kurven zu:
$f(x) = \frac{2x^3 - 2x^2 + 1}{x+1} = 2x^2 - 2x + \frac{1}{x+1}$
Die Kurve wäre dann: $y = 2x^2 - 2x$

6. Folgen und Reihen

Folgen

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto f(x) = a_x$$

Eine **Folge** ist durch eine implizite Formel $x_k = f(k)$ oder durch eine Rekursion (z.B: $a_{n+1} = 2a_n$) bestimmt.

Eine Folge konvergiert gegen ξ falls: $\lim_{x\to\infty} a_x = \xi$
Die Folge heisst dann **konvergent**, falls ξ existiert, sonst heisst sie **divergent**.

Jede monotone, beschränkte Folge konvergiert.

Reihen

Die Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ einer Folge bilden selbst wieder eine Folge.

Die „∞-te" Partialsumme $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heisst **Reihe**.

Rechenregeln für Reihen

- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$
- $\sum_{k=0}^{\infty} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k$
- $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ heisst **alternierend**, falls $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ und die a_k monoton fallen.

Alternierende Reihen konvergieren immer.

Eine Reihe heisst **konvergent**, falls die Folge der Partialsummen konvergiert.

Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heisst **absolut konvergent** falls $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Absolut konvergente Reihen konvergieren und behalten ihren Grenzwert bei beliebiger Umorndung.

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{l=0}^{\infty} b_l$ absolut konvergent, so gilt:
$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_k \cdot b_l$

Absolute Konvergenzkriterien

Majorisierte Konvergenz: sei $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent und gelte $\forall k$: $|a_k| < b_k$, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Quotientenkriterium: $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$

Wurzelkriterium: $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$

Bruchterm: $\exists c > 0$, $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_k| \le \frac{c}{k^{1+\delta}}$

Einige wichtige Reihen:

- Geometrisch: $s = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \to \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$
  Partialsumme: $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
- Harmonisch: $s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \to$ divergiert immer
  aber: $s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^t}$ konvergiert für $t > 1$
- Alternierend harmonisch: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$
- Arithmetisch: $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- Quadratisch: $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- Kubisch: $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Potenzreihen

Die **Potenzreihe** einer Folge an der Stelle z_0 ist die Funktion der Form: $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$

Potenzreihe an der Stelle 0: $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$
Reihe = Funktionswert der Potenzreihe um 0 für $z = 1$

Konvergiert eine Potenzreihe für $z \in \mathbb{C}$, dann konvergiert sie absolut für alle $z' \in \mathbb{C}$ mit $|z'| < |z|$.

Der Definitionsbereich einer Potenzreihe besteht aus allen z, für die die Reihe konvergiert.

Jede Potenzreihe besitzt einen eindeutigen **Konvergenzradius** $\rho = \sup\{\, |z| \in \mathbb{C} \mid f(z)$ konvergiert $\}$.

Für alle z mit $|z - z_0| < \rho$ konvergiert die Potenzreihe absolut. Sie divergiert, falls $|z - z_0| > \rho$.

Für $|z - z_0| = \rho$ ist ihr Verhalten unklar:
$\rho = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}\right)$; $\rho = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$

Majorandenkriterium: Wenn für eine Potenzreihe s eine Potenzreihe t existiert, die:

- immer grösser ist als s, dann gilt:
  t konvergiert → s konvergiert , $(\rho_t \leq \rho_s)$
- immer kleiner ist als s, dann gilt:
  t divergiert → s divergiert , $(\rho_s \leq \rho_t)$

Eigenschaften

- Innerhalb ihres Konvergenzradius definiert jede Potenzreihe eine stetige Funktion
- Potenzreihen dürfen innerhalb ihres Konvergenzradius gliedweise differenziert und integriert werden, dabei bleibt der Konvergenzradius gleich
- Jede rationale Funktion ist eine Potenzreihe
- Summe, Produkte und Kompositionen von Potenzreihen sind Potenzreihen
- Die Umkehrfunktion einer Potenzreihe ist wieder eine Potenzreihe

Einige wichtige Potenzreihen

- Binomialreihe: $b_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$; α fix
  Für $\alpha \in \mathbb{N}$ gilt: $b_\alpha = \sum_{k=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{k}x^k = (1+x)^\alpha$
  Es gilt: wenn $|x| < 1$ und für beliebiges α ;
  $b_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = (1+x)^\alpha$
- $|t| < 1,\ n \in \mathbb{N}^+ : \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n-1}{n-1}x^k = \frac{1}{(1-x)^n}$
- Exponentialfunktion: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k$; $\rho = \infty$
- $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{x^k}{k}$
- $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
- $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$
- $\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
- $\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}$
- $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = e$; $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!} = \frac{1}{e}$

7. Eindimensionale Differentialrechnung

Grundbegriffe

Die Funktion $f: \mathbb{R} \to X$ heisst **differenzierbar in t_0**, falls:
$\exists A = const : \ f(t_0 + h) - f(t_0) = Ah + O(h)$

Ist f überall auf $dom(f)$ differenzierbar, so heisst f differenzierbar. Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit.

Erste **Ableitung** einer Funktion f an der Stelle t_0:
$A = \frac{d}{dt}f(t_0) = f'(t_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$

Rechtsseitige Ableitung = kommt von rechts = $f'(t_0^+)$
Linksseitige Ableitung = kommt von links = $f'(t_0^-)$

Regeln der Differentialrechnung

$(f+g)' = f' + g'$	$(\lambda f)' = \lambda\,(f')$
$(f \cdot g)' = f'g + fg'$	$(f \circ g)' = f'(g) \cdot g'$
$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$	$(f_1, \dots, f_n)' = (f_1', \dots, f_n')$

Extrema und kritische Punkte

Stetige Funktionen aus einem kompakten Definitionsbereich nehmen Max. und Min. an.

Stelle x_0 heisst **lokales Maximum** von $f: X \to Y$, falls:
$\exists \delta > 0, \forall x \in X: |x - x_0| < \delta \to f(x) \leq f(x_0)$

Stelle x_0 mit $f'(x_0) = 0$ heisst **kritischer Punkt**.

Extrema sind immer entweder kritische Puntke oder Maxima/Minima auf dem Rand.

Test auf Extremum/Wendepunkt:

Sei $f'(x_0) \neq 0$. $k > 0$ mal Ableiten, bis $f^{(k)}(x_0) \neq 0$

- k ungerade: Wendepunkt

Sei $f'(x_0) = 0$. k mal Ableiten, bis $f^{(k)}(x_0) \neq 0$

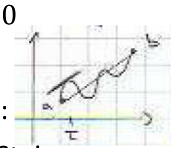
- k ungerade: Sattelpunkt
- k gerade und Auswertung positiv: Minimum
- k gerade und Auswertung negativ: Maximum

Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Satz von Rolle

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, diff'bar in (a,b) und sei $f(a) = f(b)$ so gilt: $\exists \tau \in (a,b)$ mit $f'(\tau) = 0$

Mittelwertsatz – Variante 1



Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, diff'bar in (a,b), so gilt:
$\exists \tau \in (a,b)$ mit $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\tau)$; $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ Steigung

Mittelwertsatz – Variante 2

Seien $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, diff'bar in (a,b), so gilt:
$\exists \tau \in (a,b)$ mit $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\tau)}{g'(\tau)}$
Variante 1 war für $g(x) = x$

Aussagen über Funktion und Ableitung

Besitzt die erste Ableitung einer Funktion f eine obere Schranke, so ist f Lipschitz-stetig:
$\forall x{:}\ |f'(x)| \leq M \quad \rightarrow \quad |f(x_1 - x_2)| \leq M(x_1 - x_2)$

Eine Funktion f heisst **monoton wachsend** genau dann, wenn: $\forall t{:}\ f'(t) \geq 0$

$f''(x) > 0$ ⟷ Steigung der Tangente wird immer stärker positiv ⟷ f macht **Linkskurve/konvex** ⟷ f liegt oberhalb seiner Tangenten

$f''(x) < 0$ ⟷ Steigung der Tangente wird immer stärker negativ ⟷ f macht **Rechtskurve/konkav** ⟷ f liegt unterhalb seiner Tangenten

Taylor-Approximationen

Taylorsches Approximationspolynom

Sei $f{:}\,[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ genügend oft differenzierbar. Das n. **Taylorpolynom** von f um x_0:
$j_{x_0}^n\big(f(x)\big) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$

Ist $n = \infty$, so heisst die Summe **Taylor-Reihe** und ist die Potenzreihenentwicklung der Funktion f.
$j_{x_0}^\infty\big(f(x)\big) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$
Vorsicht: Es gibt pathologische Beispiele wo $j_{x_0}^\infty(f) \neq f$

0. Polynom von $f(t)$ um t_0: $y = f(x_0)$
1. Polynom (Tangente): $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Qualität der Approximation

$f = j_{x_0}^n(f) + R_n$, wobei R_n das n. **Restglied** heisst.

Für ein geeignetes $\xi \in [x_0, x]$ hat er den Wert:
$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$

Es gilt: $R_n \in O((x - x_0)^{n+1}) = o((x - x_0)^n)$ für $x \rightarrow x_0$

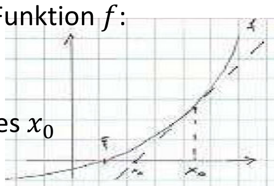
In der Regel wird ξ so gewählt, dass der Fehler möglichst gross wird. So kann man eine obere Schranke für den Fehler der Approximation bestimmen.

Ist eine Funktion durch ihre Potenzreihe um 0 gegeben, so ist dies ihre Taylorreihe mit $x_0 = 0$

Newton-Verfahren für Nullstellen

Prinzip der Nullstellenberechnung für Funktion f:

1. Starte an Stelle x_0
2. Tangente durch $(x_0, f(x_0))$
3. Nullstelle der Tangente → neues x_0



Rekursive Formel: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
Die Folge der x_i konvergiert gegen die Nullstelle.

8. Mehrdimensionale Differentialrechnung

Grundbegriffe:

Grundlagen der Vektorgeometrie

Skalarprodukt:

$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \vec{a} \cdot \vec{b} = |a| \cdot |b| \cdot cos\varphi$

Vektor(Kreuz)-Produkt:

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |a| \cdot |b| \cdot \sin\varphi$
$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_2)^T$

Partielle Ableitung

$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x =$ **partielle Ableitung** von f nach x. Dabei leitet man die Funktion nach x ab, und betrachtet die anderen Variablen als Konstant.

Wenn einen Punkt in f_x einsetzt, erhält man die Änderungsrate von f in x-Richtung in diesem Punkt.

Sind die partiellen Ableitungen n. Grades einer Funktion alle stetig, so ist die Funktion eine $\boldsymbol{C^n}$**-Funktion**.

Die Partielle Ableitung existiert nur falls: $f_x = -f_{-x}$

Für „schöne" Funktionen gilt: $(f_x)_y = \big(f_y\big)_x$

Wenn eine Funktion $f(x,y)$ nicht von x abhängt, ist die partielle Ableitung $f_x \equiv 0$.

$$f_{xy} \equiv 0 \quad \leftrightarrow \quad f(x,y) = F(x) + G(y)$$

Gradient

Der **Gradient** einer Funktion ist der Vektor, der aus allen ersten partiellen Ableitungen der Funktion gebildet wird.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\overrightarrow{e_{x_1}} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\overrightarrow{e_{x_n}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^T$$

Der Gradient zeigt (von einem Punkt aus) immer in die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion. Sein Betrag ist gleich der grössten Zuwachsrate/Steigung.

Analog kann man auch die maximale Fallrichtung durch $-\nabla f$ bestimmen.

Richtungsableitung

Sie stellt die Zuwachsrate der Funktion an einem bestimmten Punkt $\vec{x}$, in eine Richtung $\vec{v}$, mit $\vec{e} = \frac{\vec{v}}{|v|}$.

$$D_{\vec{v}}f(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{e} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{f(\vec{x} + t\vec{e}) - f(\vec{x})}{t}\right)$$

Sei φ der Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\nabla f(\vec{x})$:

$$D_{\vec{v}}f(\vec{x}) = |\nabla f(\vec{x})| \cdot \cos\varphi$$

Die Richtungsableitung ist die Projektion des Gradienten auf eine bestimmte Richtung.

Tangentialebene einer Funktion

Die Koordinatendarstellung der Tangentialebene von $f(x,y)$ in (x_0,y_0):

$$T:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0,y_0) \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Gleichung der Tangentialebene von $f(x,y)$ in (x_0,y_0):

$$T:\ -f_x(x_0,y_0)x - f_y(x_0,y_0)y + z = c$$

Bestimme c durch Einsetzen des Punktes.

Verallgemeinerte Kettenregel

Sei $\phi: t \to f(\vec{x}(t))$, dann gilt: $\phi'(t) = \nabla f(\vec{x}(t)) \cdot \vec{x}'(t)$

Beispiel: $\phi(t) = f(x(t), y(t))$

$\to\ \phi' = f_x(x(t),y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t),y(t)) \cdot y'(t)$

Leibniz-Regel

Für Integrale mit einem Parameter:

$$\frac{d}{dt}\int_B f(\vec{x},t)\,d\mu(\vec{x}) = \int_B \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{x},t)\,d\mu(\vec{x})$$

Falls die Grenze auch von t abhängt:

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(\vec{x},t)\,d\mu(\vec{x}) = f(b(t),t)\cdot b'(t) - f(a(t),t)\cdot a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{x},t)d\mu(\vec{x})$$

Mehrdimensionale Taylorentwicklung

Herleitung

Für eine Funktion von k Variablen bedient man sich grundsätzlich einer **Hilfsfunktion** (am Beispiel $k=2$) $\phi(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$.

Nun gilt: $\phi(0) = f(x_0,y_0)$; $\phi(1) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$

Jetzt kann man die Taylorentwicklung für $k=1$ anwenden. Man erhält also:

$$\phi(1) = \phi(0) + \frac{1}{1!}\phi'(0) + \frac{1}{2!}\phi''(0) + \ \dots + \frac{1}{n!}\phi^n(0) + R_n$$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\phi^{(n+1)}(\tau), \qquad \tau \in [0,1]$$

Die Ableitungen der Hilfsfunktion erhält man durch Anwendung der verallgemeinerten Kettenregel.

Funktionen zweier Variablen (k = 2)

Mit x_0, y_0 als bekannte Startstelle, und $\Delta x = (x - x_0)$:

$$\begin{aligned} j^n_{x_0,y_0} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + f_x\Delta x + f_y \Delta y \\ &+ \frac{1}{2!}[f_{xx}\cdot(\Delta x)^2 + 2f_{xy}\cdot\Delta x\Delta y + f_{yy}\cdot(\Delta y)^2] \\ &+ \ \dots + \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{\partial^n f}{\partial^{n-i}x\,\partial^i y}(\Delta x)^{n-i}(\Delta y)^i \end{aligned}$$

Dabei sind die Ableitungen an der Startstelle zu nehmen.

Funktionen dreier Variablen (k = 3)

Für $n=2$ (Polynom zweiten Grades), mit x_0, y_0, z_0 als Startstelle, und $\Delta x = (x - x_0)$:

$$\begin{aligned} j^n_{x_0,y_0,z_0} f(x,y,z) &= f(x_0,y_0,z_0) + f_x\Delta x + f_y\Delta y + f_z\Delta z \\ &+ \frac{1}{2!}[f_{xx}\cdot(\Delta x)^2 + f_{yy}\cdot(\Delta y)^2 + f_{zz}\cdot(\Delta z)^2 \\ &+ 2f_{xy}\cdot\Delta x\Delta y + 2f_{xz}\cdot\Delta x\Delta z + 2f_{yz}\cdot\Delta y\Delta z] \end{aligned}$$

Dabei sind die Ableitungen an der Startstelle zu nehmen.

Hesse-Matrix einer Funktion

Die **Hesse-Matrix** einer n-dimensionalen Funktion wird wie folgt gebildet:

$$H_p f = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

Die Hesse-Matrix stellt sich aus den partiellen Ableitungen zweiten Grades der Funktion zusammen und ist immer symmetrisch.

Allgemeiner 2-Jet einer Funktion

$$j^2_p f = f(p) + (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)\cdot\nabla f(p) + \frac{1}{2}(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)\cdot H_p f\cdot(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)^T$$

Extremalstellen

Extremalstellen auf explizitem Bereich

Vorgehen zur Berechnung der Extrema einer Funktion f auf einem n- Dimensionalen Bereich B:

1. Kritische Punkte von f bestimmen: $\nabla f(P) = \vec{0}$
2. Für die Punkte P im Inneren von B die Hesse-Matrix bestimmen und die Eigenwerte berechnen. Nun sind 4 Fälle möglich:
   - **Minimum:** Alle EW > 0
   - **Maximum:** Alle EW < 0
   - **Sattelpunkt:** beides vorhanden
   - **Entarteter Punkt:**
     mind. 1 EW = 0 $\leftrightarrow$ $\det(H_p f) = 0$
3. Rand von B betrachten: Seitenflächen des Bereichs durch Funktionen ausdrücken und deren Extrema berechnen
4. Schnittmengen (Ecken) der obigen Funktionen bestimmen und deren Extrema berechnen.

Bei entarteten kritischen Punkten kann man noch abklären, was diese wirklich für Punkte sind, indem man die Umgebung des Punktes mittels Niveaulinien in Bereiche unterteilt und untersucht, ob die Funktionswerte in diesen Bereichen positiv oder negativ sind.

Extremalstellen mit Nebenbedingungen (Lagrange):

Gesucht sind die Extrema einer Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit r Nebenbedingungen. Die Nebenbedingungen definieren im Allgemeinen eine $(n-r)$-dimensionale „Fläche“ S.

Punkt p heisst **bedingt kritisch** bezüglich S, falls:

$$\nabla f(p) \perp T_p(S) \ \wedge (p \in S)$$

Vorgehen zu Konstruktion des Gleichungssystems der Extrema von f mit Nebenbedingungen $F_1, \ldots, F_r$:

1. Nehme alle gegebenen Nebenbedingungen und bilde ein Gleichungssystem $\rightarrow r$ Gleichungen
2. Ergänze das System durch folgende Gleichungen: $\nabla f(p) = \lambda_1 \nabla F_1(p) + \ \ldots + \lambda_r \nabla F_r(p)$

Allgemein entstehen mit diesem Ansatz $n+r$ Gleichungen mit $n+r$ Unbekannten. Die r λ_i werden „mitberechnet“, obwohl sie für das Resultat unnötig sind.

Implizite Funktionen

Definition und Eigenschaften

Sei eine **implizite Funktion** durch $f(x,y) = 0$ gegeben.

Wenn sich die Kurve einer impliziten Funktion selbst schneidet, gilt in dem Punkt: $\nabla f = 0$

Falls $f_y(x_0, y_0) \neq 0$, so existiert ein Fenster mit Zentrum (x_0, y_0), wo die implizite Funktion durch $y = \phi(x)$ beschrieben wird.

Es gilt also $\phi(x_0) = y_0$ und $f(x, \phi(x)) = 0$. Weiter gilt für die Ableitungen:

- $\phi'(x_0) = -\frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}$
- $\phi''(x_0) = \frac{f_{xx}f_y^2 + 2f_xf_yf_{xy} - f_{yy}f_x^2}{f_y^3}$

Analog gilt dasselbe für den Fall $f_x(x_0, y_0) \neq 0$. Dann kann die implizite Funktion als $x = \psi(y)$ dargestellt werden. Die Ableitungen lauten dann:

- $\psi'(y_0) = -\frac{f_y(x_0,y_0)}{f_x(x_0,y_0)}$
- $\psi''(y_0) = \frac{f_{yy}f_x^2 + 2f_xf_yf_{xy} - f_{xx}f_y^2}{f_x^3}$

Zusammenhang mit Niveaulinien

Jede implizite Funktion gegeben durch $f(x,y) = c$ kann als **Niveaulinie** der Funktion $f(x,y)$ aufgefasst werden.

Sei $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$; $f(x_0, y_0) = c_0$ dann ist die Niveau-linie $f^{-1}(c_0)$ in der Nähe von x_0, y_0 eine glatte Kurve.

$\nabla f(x_0, y_0)$ steht senkrecht zur Tangente an die Niveauline im Punkt x_0, y_0.

Analog gilt im 3D-Raum, dass der Gradient senkrecht auf die Tangentialebene der Niveaufläche steht.

9. Integralrechnung

Hauptsätze

$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

$\int_a^b \alpha f(t) + \beta g(t) dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$

$\frac{d}{dx} \int_a^{g(x)} f(t)dt = f(g(x))g'(x) \rightarrow \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$

$\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$

$\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt$

$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

$\forall x \in B: |f(x)| \leq M \ \rightarrow \ \left| \int_B f(x)dx \right| \leq M \cdot \mu(B)$

$\int_B 1 d\mu = \mu(B);$

$\int_{B_1 \cup B_2} f d\mu = \int_{B_1} f d\mu + \int_{B_2} f d\mu - \int_{B_1 \cap B_2} f d\mu$

Grundbegriffe

Allgemeines **Riemann-Integral:**

$\int_B f \, d\mu_B = \lim_{\delta(Z) \to 0} \ \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) \cdot \mu(B_k)$

Zweidimensionales Riemann-Integral:

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)$; $x_k = a + \frac{k(b-a)}{N}$

Durch Riemann-Integrale werden teilweise auch nicht-stetige Funktionen integrierbar.

Die Menge aller Stammfunktionen F einer Funktion f heisst das **unbestimmte Integral** von f.

Ist F eine Stammfunktion von f, so ist auch $F + c$ eine Stammfunktion.

Jede „vernünftige“ Menge besitzt ein geeignetes **Mass** μ.

- μ_1: Länge $\rightarrow \ \mu_1([0,1]) = 1$
- μ_2: Fläche

Masse haben folgende Eigenschaften:

- Monotonie: $B_1 \subseteq B_2 \rightarrow \ \mu(B_1) \leq \ \mu(B_2)$
- Additivität: $\mu(B_1 \cup B_2) \leq \mu(B_1) + \mu(B_2)$
  $|B_1 \cap B_2| = 0 \rightarrow \mu(B_1 \cup B_2) = \mu(B_1) + \mu(B_2)$

Der **Durchmesser** einer Menge ist der grösstmögliche Abstand zweier Elemente der Menge:
$diam(B) = \sup \{|x - x'| \, | \, x, x' \in B\}$
(zB: $diam([0,1]) = 1$; $diam((0,1)) = 1$)

Das **Korn** δ einer Zerlegung Z von einer Menge B:
$\delta(Z) = \max_{1 \leq k \leq N} diam(B_K)$

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Nimmt $f: B \to \mathbb{R}$ jeden Wert zwischen $inf_{x\in B} f(x)$ und $sup_{x\in B} f(x)$ an, so $\exists \xi \in B$ mit $\int_B f\, d\mu = f(\xi)\mu(B)$

Integrationstechniken

Partielle Integration

$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

$\int_a^b f'g\, dx = [fg]_a^b - \int_a^b fg'\, dx$

Substitution

Beispiel 1 :

$\int_{x_1}^{x_2} 2x\, e^{x^2}\, dx \quad \to \quad x^2 = u \quad \to \quad dx = \frac{du}{2x}$
$\int_{u(x_1)}^{u(x_2)} 2x\, e^u \frac{du}{2x} = \int_{u(x_1)}^{u(x_2)} e^u du = [e^{x^2}]_{x_1}^{x_2}$

Beispiel 2:

$\int \arcsin x\ dx \quad \to \quad x = \sin x \quad \to \quad dx = du \cos u$

$\int \arcsin(\sin u)\cos u\ du = \int u \cos u\, du$

Partialbruchzerlegung

Diese Technik ist nützlich bei Integralen folgender Form:

$$\int f(x)dx = \int \frac{p(x)}{q(x)}dx$$

wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome sind.

Vorgehen:

1. Falls $\deg(p) > \deg(q)$: Polynomdivison
2. Finde Nullstellen von $q(x)$
3. α ist r-fache Nullstelle : $\frac{A_1}{x-\alpha} + \ \dots\ + \frac{A_r}{(x-\alpha)^r}$
4. Koeffizientenvergleich: $A_1, \dots, A_r$ bestimmen
5. Integriere die Partialbrüche einzeln

Generalsubstitution

Bei problematischen Integralaufgaben mit Funktionen von trigonometrischen oder hyperbolischen Funktionen hilft manchmal folgende Substitution:

Trigonometrisch:

$t = \tan\frac{x}{2} \quad \to \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Hyperbolisch:

$t = e^x \quad \to \quad dx = \frac{dt}{t}$

$\sinh x = \frac{t^2-1}{2t} \qquad \cosh x = \frac{t^2+1}{2t}$

Uneigentliche Integrale

Uneigentliche Integrale können konvergieren oder nicht.

$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$

Konvergenzverhalten

Gilt $|f(x)| \le |g(x)|$ überall in $[a,\infty)$ und konvergiert $\int_a^\infty g(x)dx$, so konvergiert auch $\int_a^\infty f(x)dx$.

Gilt $|f(x)| \ge |g(x)|$ überall in $[a,\infty)$ und divergiert $\int_a^\infty g(x)dx$, so divergiert auch $\int_a^\infty f(x)dx$

Gammafunktion

$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx \quad \to \quad \Gamma(a+1) = a\cdot\Gamma(a)$

$\Gamma(1) = 1 \quad \to \quad \Gamma(a+1) = a!$ für $a \in \mathbb{Z}$

Berechnung der Bogenlänge einer Kurve

Die Bogenlänge einer Kurve $f(x)$ im Intervall $[a,b]$ ist gegeben durch: $L(f,a,b) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$

Mehrfachintegrale

$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dxdy$

Bereich $B \subset \mathbb{R}^n$ heisst **y-einfach**, falls er sich durch 2 stetige Funktionen $\varphi(x)$ und ψ(x) so darstellen lässt:
$B = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x) \,\}$

Für z-einfach (also 3-dimensional) müssen Funktionen $\varphi(x,y)$ und $\psi(x,y)$ gefunden werden.

Sei B y-einfach, so gilt: (analog für x-einfach, z-einfach)
$\int_B f(x,y)\, d\,\mu(x,y) = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dydx$

10. Differenzialgleichungen

Allgemein

DGL erster Ordnung können geometrisch als **Richtungsfelder** interpretiert werden.

Eine DGL $y' = f(x,y)$ heisst **homogen**, falls:

$$f(x,y) = f(\alpha x, \alpha y)$$

Die allgemeine Lösung einer (vernünftigen) DGL n-ter Ordnung ist eine n-parametrige Funktionenschar.

Ein korrekt gestelltes **Anfangswertproblem** (AWP) enthält n Anfangswerte und macht die Lösung des Problems im Fall von lokaler Lipschitz-Stetigkeit eindeutig. Allgemeines AWP:

- $y^{(n)} = f(x,\ y', y'', \dots, y^{(n-1)})$
- $y(x_0) = y_0$
- $y'(x_0) = y_1 \quad \dots$
- $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

Um ein AWP zu lösen:

1. DGL allgemein lösen (Funktionenschar)
2. Bedingungen einsetzen → erhalte Parameter

Anfangswerte können auch implizit gegeben sein, z.B in Form von Schranken.

Korrekt gestelltes **Randwertproblem:**
Bsp: $y'' + \omega^2 y = 0$; $y(0) = 0$; $y(\pi) = \alpha$
Für Randwertprobleme gilt der Eindeutigkeitssatz nicht, das Problem kann je nach α und ω eine, keine oder ∞-viele Lösungen haben

Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

DGL ist **linear**, falls Ableitungen nur in Potenz 1 vorkommen (Rest darf zB. quadratisch sein).

Der Ableitungsoperator D ist linear. $D^n y = y^{(n)}$
Definiere: $L(y) = D^n(y) + a_{n-1}D^{n-1}(y) + \ldots + a_0 y$

Allgemeine lineare DGL mit konstanten Koeffizienten:

$$Ly = g(x)$$

Abmachung: $a \in \mathbb{R} \to$ Lösungen $\in \mathbb{R}$

Lineare homogene DGL mit konstanten Koeffizienten:

Gesucht ist eine Funktion $y(x)$, so dass:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = Ly = 0$$

Lösen einer homogenen DGL $Ly = 0$:

1. Charakteristisches Polynom aufstellen: $chp(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0$
2. Nullstellen/Eigenwerte λ_k des Polynoms bestimmen $\to$ Lösungsansatz: $y_k = e^{\lambda_k x}$
3. Die Lösungen sind Basis eines Vektorraums, das heisst (für Lösungsmenge $\mathcal{L}$ der DGL):
   - $y_1, y_2 \in \mathcal{L} \to (\alpha y_1 + \beta y_2) \in \mathcal{L}$
   - $\mathcal{L}$ ist ein n-dimensionaler Vektorraum

Falls die λ_k einfache, reelle Nullstellen von $chp(\lambda)$ sind, ist die allgemeine Lösung der DGL als Linearkombination der y_k gegeben.

Nun können aber auch 2 Spezialfälle auftreten:

- λ_k ist $\boldsymbol{r}$**-fache Nullstelle** von $chp(\lambda)$:

$$y_k(x) = e^{\lambda_k x};\ y_{k+1}(x) = xe^{\lambda_k x} \ldots;\ y_r(x) = x^{r-1}e^{\lambda_k x}$$

- λ_k und λ_{k+1} sind **komplex** (aber konjugiert, da reelle Koeffizienten): $\lambda_k = u + iv$; $\lambda_{k+1} = u - iv$

$$y_k(x) = Ae^{xu}\cos(xv) + Be^{xu}\sin(xv)$$

Lineare inhomogene DGL mit konstanten Koeffizienten:

Allgemeine inhomogene DGL: $Ly = g(x)$ mit $g \neq 0$

Vorgehen beim Lösen:

1. Bestimmen die Lösung y_h der zugehörigen homogenen DGL $Ly = 0$
2. Wähle geeigneten Ansatz (siehe unten in der Tabelle) für Partikulärlösung y_p
3. Setze Ansatz in die DGL ein und erhalte eine konkrete Partikulärlösung
4. Die allgemeine Lösung ist nun $y = y_h + y_p$

Satz: Sei y_1 Lösung von $Ly = g_1$ und y_2 Lösung von $Ly = g_2$, so ist $y_1 + y_2$ Lösung von $Ly = g_1 + g_2$

Ansätze zur Bestimmung der partikulären Lösung:

$g(x)$	Spektralbedingung	Ansatz für y_p
$b_0 + b_1 x + \ldots + b_r x^r$	$0 \notin$ spec(L) $0 \in$ spec(L), m-fach	$A_0 + A_1 x + \cdots + A_r x^r$ $A_0 + A_1 x + \cdots + A_{r+m} x^{r+m}$
$e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$	$\lambda \notin$ spec(L) $\lambda \in$ spec(L), m-fach	$Ae^{\lambda x}$ $Ax^m e^{\lambda x}$
$\cos(\alpha x) + \sin(\alpha x)$	$i\alpha \notin$ spec(L) $i\alpha \in$ spec(L), 1-fach	$A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$ $x \cdot [A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)]$
$x^2 e^{-x}$	$-1 \notin$ spec(L)	$(A_0 + A_1 x + A_2 x^2)e^{-x}$
$c = const.$		Lässt sich mit dem ersten Fall lösen

Für Linearkombinationen der aufgeführten $g(x)$ verwende man Linearkombinationen ihrer Ansätze.

Um den Ansatz für die Partikulärlösung zu finden, kann man auch alle Probleme in zwei Fälle unterteilen:

- $Ly = p(x) \cdot e^{\lambda x}$, λ sei m-facher Eigenwert (mit p Polynom von Grad r):
  $y_p = q(x) \cdot e^{\lambda x}$, q Polynom von Grad $r + m$
- $Ly = p_1(x) \cdot e^{\mu x}\cos vx + p_2(x) \cdot e^{\mu x}\sin vx$, $(\mu \pm iv)$ seien je m-fache Eigenwerte:
  $y_p = q_1(x) \cdot e^{\mu x}\cos vx + q_2(x) \cdot e^{\mu x}\sin vx$, wobei q_1, q_2 Polynome von Grad $r + m$

Lineare DGL erster Ordnung

Variation der Konstanten

$$y' = p(x) \cdot y + q(x)$$

1. Löse homogene DGL $y_h' = p(x) \cdot y_h$
   $y_h = Ae^{P(x)}$, wobei $P'(x) = p(x)$
2. Finde partikuläre Lösung, verwende Ansatz: $y_p = C(x) \cdot y_h$
3. Berechne $C(x)$ aus: $C'(x) \cdot y_h = q(x)$
   Es gilt also: $C(x) = \int \frac{q(x)}{y_h(x)}$
4. Allgemeine Lösung: $y = y_h + y_p$

Separation der Variablen:

Eine DGL der Form $y' = \frac{dy}{dx} = g(x) \cdot k(y)$ lässt sich folgendermassen lösen:

1. Nullstellen von $k(y)$ sind konstante Lösungen
2. Trenne die Variablen: $\frac{1}{k(y)}dy = g(x)dx$
3. Integriere: $\int \frac{1}{k(y)}\,dy = \int g(x)dx$
4. Löse nach y auf

Substitution:

Manche nicht-separierbare DGL erster Ordnung lassen sich durch geschickte Substitution separierbar machen.

Danach kann man die neu erhaltene DGL für u lösen und rücksubstituieren.

Beispiel: $y' = \phi(x+y+c) \to u = x+y \to y' = u' - 1$

Im Spezialfall, dass eine homogene Differentialgleichung vorliegt, hilft die Substitution $u = \frac{y}{x}$ immer weiter.

Es ergibt sich: $u' = \frac{f(1,u)-u}{x} \;\to\;$ separierbar

Systeme von Differentialgleichungen

System von DGL 1.Ordnung (konstante Koeffizienten):

- $x_1'(t) = f_1(t, x_1, \dots, x_n)$
- $x_2'(t) = f_2(t, x_1, \dots, x_n)$ …
- $x_n'(t) = f_n(t, x_1, \dots, x_n)$

Das System ist linear, falls alle f_i linear sind. Das System heisst autonom, wenn t in den f_i nicht vorkommt.

Lösung eines Systems von 2 DGL:

1. $\begin{matrix} x_1' = ax_1 + bx_2 \\ x_2' = cx_1 + dx_2 \end{matrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};\quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
2. Ansatz: $\vec{l} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \vec{\alpha} e^{\lambda t}$

Wir suchen EW λ und EV $\vec{\alpha}$ von M: $(M - \lambda I) \cdot \vec{\alpha} = 0$

Lösungsvektor: $\vec{l} = c_1 \vec{\alpha_1} e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{\alpha_2} e^{\lambda_2 t}$

11. Formelsammlung

Rechengesetze

Kommutativität: $a + b = b + a\,;\ ab = ba$

Assoziativität: $(a+b)+c = a+(b+c)$

Distributivität: $a(b+c) = ab + ac$

Vereinzelte nützliche Formeln

- $e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
- Quadratische Gleichungen: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- $\forall x \geq -1\,,\ n \in \mathbb{N}_0;\ \ (1+x)^n \geq 1 + nx$
- Dreiecksungl.: $|a+b| \leq |a| + |b|\,;\quad a, b \in \mathbb{R}$
  Dreiecksungl.: $|a-b| \geq |a| - |b|\,;\quad a, b \in \mathbb{R}$
- Beträge: $|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$
- Differentierbar → stetig → integrierbar

Spezielle Funktionsgleichungen

2-Dimensional

Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \to a$: x-Halbachse; b: y-Halbachse

Hyperbel: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \to a$: x-Halbachse; b: y-Halbachse

Kreis: $x^2 + y^2 = r^2 \to r$ Radius des Kreises

3-Dimensional

Kugel: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \to r$ Radius der Kugel

Stereometrie:

Quader: $O = 2(ab + bc + ac)$; $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Zylinder: $O = 2\pi r(r+h); V = \pi r^2 h; M = 2\pi r h$

Kreiskegel: $O = \pi r(r+s); V = \frac{1}{3}\pi r^2 h; M = \pi r s$

Kegelstumpf: $M = \pi s(r_1 + r_2); V = \frac{h\pi}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$

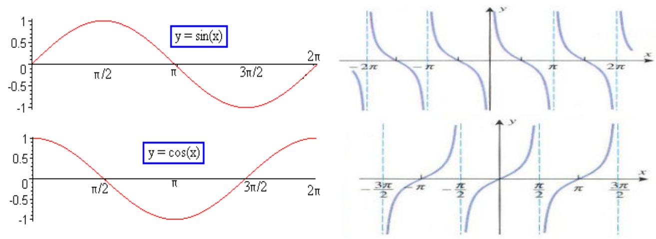
Kugel: $O = 4\pi r^2;\ V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Der Binomialkoeffizient:

- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n+1}{k} - \binom{n}{k-1}$
- Binomischer Satz: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k y^{n-k}$
- $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$
- Vandermonde: $\binom{n}{k} = \sum_{t=0}^{k}\binom{r}{t}\binom{n-r}{k-t}$
- $\binom{n}{k} \geq \left(\frac{n}{k}\right)^k;\ \ \frac{\binom{n}{k}}{\left(\frac{n}{k}\right)^k} \leq e^k;\ \ \left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{n\cdot e}{k}\right)^k$

Trigonometrische Funktionen:

- $\sin x = Im(e^{ix}) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
- $\cos x = Re(e^{ix}) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
- $\tan x = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{\cot(x)} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})}$



	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Beziehungen

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x\,;\ \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$

Reduktion

- $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right);\ \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
- $\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right); \cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
- $\sin x = \sin(\pi - x)\,;\ \cos x = -\cos(\pi - x)$
- $\tan x = -\tan(\pi - x); \cot x = -\cot(\pi - x)$

Funktionen von $x \pm y,\ 2x,\ 3x,\ {}^{x}/_{2}$

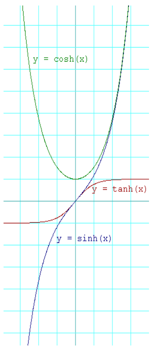
- $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \ \pm \cos x \sin y$
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$; $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
- $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$
- $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$
- $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$; $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$
- $\tan^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$; $\tan \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

Summen und Produkte

- $\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$
- $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$
- $\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)]$
- $\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha \pm \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$
- $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$

Hyperbolische Funktionen:

- $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- $\operatorname{arsinh}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
- $\operatorname{arcosh}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$
- $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
- $\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$



Beziehungen

- sinh ist ungerade: $\sinh x = -\sinh(-x)$
- cosh ist gerade: $\cosh x = \cosh(-x)$
- $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \sinh y \cosh x$
- $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- $\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$
- $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$
- $\cosh x \pm \sinh x = e^{\pm x}$

Rechnen mit Potenzen und Logarithmen:

- $a^n a^m = a^{n+m}$; $a^n b^n = (ab)^n$
- $z \in \mathbb{C}$: $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$; $|e^z| = e^{Re(z)}$
- $(a^n)^m = a^{nm}$; $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$; $\sqrt[n]{a} = x \leftrightarrow x^n = a$
- $\log_a b = x \leftrightarrow a^x = b$; $\log(u^n) = n \log u$
- $\log u + \log v = \log(u \cdot v)$; $\log \frac{1}{u} = -\log u$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$; $a^x = e^{x \log a}$

Ableitungs- und Integrationstabelle:

Funktion $F(x)$	Ableitung $f(x)$
x^n	nx^{n-1}
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{2}{x^3}$
$\frac{a^x}{\ln a}$	a^x
a^x	$a^x \cdot \ln a$
x^x	$(1+\ln x)x^x$
$x(\ln x) - x$	$\ln x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{n}\ln^n x$	$\frac{1}{x}\ln^{n-1} x$
$\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$	$\sqrt{a^2-x^2}$
$\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$	$\sqrt{a^2+x^2}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$-\ln \cos x$	$\tan x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\ln \sin x$	$\cot x$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1+cot^2 x)$
$x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$
$x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2}$	$\arccos x$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$
$x \cdot \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$	$\arctan x$
$\frac{1}{d} \cdot \arctan\frac{x}{d}$	$\frac{1}{x^2+d^2}$
$x - \arctan x$	$\frac{x^2}{x^2+1}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\ln \cosh x$	$\tanh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$
$\ln \sinh x$	$\coth x$
$\coth x$	$\frac{-1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$
$x \cdot \operatorname{arsinh} x - \sqrt{1+x^2}$	$\operatorname{arsinh} x$
$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$x \cdot \operatorname{arcosh} x - \sqrt{1-x^2}$	$\operatorname{arcosh} x$
$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; $x > 1$
$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$; $\lvert x \rvert < 1$
$\operatorname{arcoth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$; $\lvert x \rvert > 1$
a^{cx}	$(c \ln a)a^{cx}$
$\frac{1}{an}(ax+b)^n$	$(ax+b)^{n+1}$
$\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b \rvert$	$\frac{1}{ax+b}$

$\frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$	$\sin^2 x$
$\frac{1}{2}(x + \sin x \cos x)$	$\cos^2 x$
$\tan x - x$	$\tan^2 x$

12. Beispiele von Aufgaben

Aufgabe

Bestimme den Abstand der Fläche $z = xy + 1$ vom Koordinatenurpsrung.

Lösung

Betrachte $z - xy = 1$ als Niveauline $f^{-1}(1)$ der Funktion $f(x, y, z) = z - xy$.
Für den gesuchten Punkt $p = (x_0, y_0, z_0)^T$: $\vec{p} \perp f^{-1}(1)$.
Satz über implizite Funktionen: $\nabla f(a) \perp f^{-1}(b)$, falls $a \in f^{-1}(b)$. Also gilt: $\nabla f(p) \perp f^{-1}(1)$

Die Beziehungen lassen sich vereinfachen: $p = \lambda \cdot \nabla f(p)$

$$\begin{array}{r|lcl|} 1) & x_0 & = & -y_0 \cdot \lambda \\ 2) & y_0 & = & -x_0 \cdot \lambda \\ 3) & z_0 & = & 1 \cdot \lambda \\ 4) & z_0 & = & x_0 y_0 + 1 \end{array} \rightarrow \lambda = -\frac{x_0}{y_0} \rightarrow \text{aus 2: } x_0^2 = y_0^2$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} x_0 & = & \pm y_0 \\ z_0 y_0 & = & -x_0 \end{vmatrix} \rightarrow z_0 = \pm 1$$

$\rightarrow$ aus 4: $(x_0^2 = 0) \vee (x_0^2 = -2) \rightarrow p = (0,0,1)^T$
Der Abstand zum Ursprung beträgt somit 1.

Aufgabe

Berechne die folgenden Grenzwerte:

- $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2 + n} - n\right)$
- $\lim_{n\to 0+} \sin x \cdot \log x$

Lösung

- $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2 + n} - n\right) = \left(\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n} + n}\right) = \left(\frac{n \cdot \frac{1}{n}}{\left(\sqrt{n^2+n} + n\right) \cdot \frac{1}{n}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1}\right) = \frac{1}{2}$
- $\lim_{n\to 0+} \frac{\log x}{\frac{1}{\sin x}} = \frac{\frac{1}{x \cdot \log x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \frac{\sin^2 x}{-\log x \cdot x \cdot \cos x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\log x \; x \sin x - \log x \cos x} = 0$

Aufgabe

Bestimme die Orthogonaltrajektorien zur Kurvenschar $y = \frac{k}{x}$.

Lösung

Gesucht: $y_\perp$, sodass in jedem Punkt gilt: $y_\perp'(x) = -\frac{1}{y'(x)}$

Wir scheiben: $k = xy$; $y' = -\frac{k}{x^2} = -\frac{y}{x}$

Also gilt: $y_\perp' = -\frac{1}{y'} = \frac{x}{y} = \frac{x}{y_\perp} \rightarrow y_\perp' \cdot y_\perp = x$

Separierbare DGL, Lösung: $y_\perp = \pm\sqrt{x^2 + c}$