Zusammenfassung Einführung in die elektronische Schaltungs- und Übertragungstechnik

Fabian Hahn, Dino Wernli

15. März 2009

Statische Netzwerke

Elektrische Ladung Q

Atome bestehen aus Protonen und Elektronen. Physikalische Objekte, die ja aus Atomen bestehen, können *elektrische Ladung* auf sich tragen, wenn sie aus mehr Protonen als Elektronen (oder umgekehrt) bestehen. Insofern ist Ladung immer ein Vielfaches der Elementarladung e, welche die Ladung eines Protons beschreibt ($-e$ ist die Ladung eines Elektrons).

$$Q = \pm ne \tag{1}$$

Elektrisches Feld E

Eine *elektrische Ladung* Q erzeugt im freien Raum im Abstand r ein elektrisches Feld:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_e \tag{2}$$

Coulombkraft F

Zwei Ladungen Q_1 und Q_2 ziehen sich gemäss der *Coulombkraft* an:

$$\vec{F} = Q_2 \cdot \vec{E}_{Q_1} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_e \tag{3}$$

Elektrischer Strom I

Werden *elektrische Ladungen* im Raum bewegt, so entsteht *elektrischer Strom*. Er wird gemessen als Ladungsfluss pro Zeit:

$$\text{Momentanstrom: } i = \frac{dQ}{dt} \tag{4}$$

$$\text{zeitlich konstanter Strom: } I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \tag{5}$$

Elektrische Spannung U

Die *elektrische Spannung* ist ein Mass für den benötigten *Arbeitsaufwand*, um eine *elektrische Ladung* innerhalb eines elektrischen Feldes zu verschieben. Insofern hat eine *Spannung* auch immer zwei Bezugspunkte (hier bezeichnet mit A und B):

$$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{Q} = \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{ds} \tag{6}$$

Elektrisches Potential Φ

Das *elektrische Potential* in einem bestimmten Punkt A ist eine *Spannungsangabe* bezüglich eines fixen Nullpunkts 0:

$$\Phi_A = \int_A^0 \vec{E} \cdot \vec{ds} \tag{7}$$

Damit lässt sich die *Spannung* zwischen zwei Punkten A und B auch als Potentialdifferenz dieser Punkte definieren:

$$U_{AB} = \Delta\Phi = \Phi_A - \Phi_B \tag{8}$$

Elektrischer Widerstand R

Der *Elektrische Widerstand* eines Objekts ist ein Mass für die benötigte *Spannung*, um einen bestimmten *Strom* auf das Objekt zu bringen:

$$R = \frac{U}{I} \tag{9}$$

Der Kehrwert des *elektrischen Widerstands* heisst **Leitwert**:

$$G = \frac{1}{R} = \frac{I}{U} \tag{10}$$

Spezifischer Widerstand ρ

Der *spezifische Widerstand* ρ bezeichnet die elektrische Widerstandsfähigkeit eines Materials unabhängig von seiner objektabhängigen Geometrie.
Für einen (nicht-idealen) Leiter des Durchnitts A und der Länge l gilt:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} \tag{11}$$

Der Kehrwert des *spezifischen Widerstands* heisst **elektrische Leitfähigkeit**:

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \tag{12}$$

Elektrische Energie W

Verschiebt man *elektrische Ladung* in einem elektrischen Feld, so muss dafür physikalische Arbeit aufgewendet werden. Fliesst die Ladungsmenge Q in einem kleinen Zeitabschnitt dt durch einen *Widerstand*, so ergibt sich für die geleistete Arbeit in diesem Zeitabschnitt:

$$dW = U \cdot I \cdot dt \tag{13}$$

Integriert man über ein ganzes Zeitintervall, so ergibt sich:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} U \cdot I \cdot dt \tag{14}$$

Handelt es sich um ein statisches System, so ergibt sich:

$$W = U \cdot I \cdot t \tag{15}$$

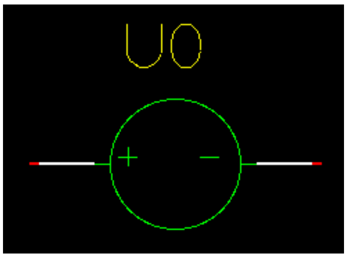


Abbildung 1: Eine ideale Spannungsquelle

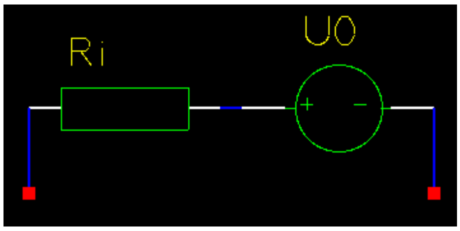


Abbildung 2: Eine reale Spannungsquelle

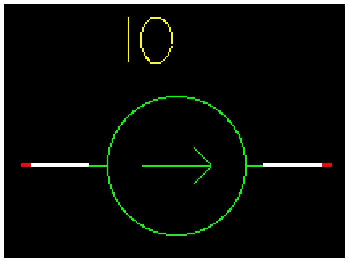


Abbildung 3: Eine ideale Stromquelle

Elektrische Leistung P

Die *elektrische Leistung* ist der durchschnittliche Energieverbrauch zu einem bestimmten Zeitpunkt:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{U \cdot I \cdot dt}{dt} = U \cdot I \tag{16}$$

Kirchhoffsche Regeln

Knotenregel

Die Summe aller zufliessenden Ströme in einem elektrischen Knotenpunkt ist gleich der Summe aller abfliessenden Ströme in diesem Punkt.
Gibt man der einen Gruppe ein negatives Vorzeichen, so lässt sich die Regel schreiben als:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0 \tag{17}$$

Maschenregel

Innerhalb einer Masche (eines Kreises) eines elektrischen Netzwerks addieren sich alle Teilspannungen in Umlaufrichtung zu null.
Bezeichnet man diese Teilspannungen mit U_i, so gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} U_i = 0 \tag{18}$$

Kennlinien

Die *Strom-Spannungs-Kennlinie* eines elektrischen Bauteils mit zwei Anschlüssen (eines **Zweipols**) stellt die Beziehung zwischen der anliegenden *Spannung* und dem durch das Bauteil fliessenden *Strom* dar. Ein Netzwerk aus Bauteilen mit linearen *Kennlinien* heisst **lineares Netzwerk**.

Spannungsquellen

Ideale Spannungsquellen

Eine ideale *Spannungsquelle* ist ein Bauteil, welches unabhängig von der angeschlossenen Last aus einem unendlichen *Energievorrat* eine konstante *Spannung* U_0 liefert. Abbildung 1 zeigt eine solche *ideale Spannungsquelle*.

Reale Spannungsquellen

In der Realität gibt es keine *idealen Spannungsquellen*, denn *Energievorräte* sind immer begrenzt. Eine *reale Spannungsquelle* wird deshalb als *Serieschaltung* einer *idealen Spannungsquelle* U_0 und einem **Innenwiderstand** R_i modelliert, damit man den Einfluss der angeschlossenen Last auf die tatsächlich erzeugte *Spannung* miteinbeziehen kann. Abbildung 2 zeigt eine solche *reale Spannungsquelle*.
Die *Kennlinie* einer *realen Spannungsquelle* ist gegeben durch:

$$U(I) = U_0 - R_i \cdot I \tag{19}$$

Stromquellen

Ideale Stromquellen

Eine *ideale Stromquelle* liefert einen konstanten *Strom* I_0 aus einer unendlichen Energiequelle unabhängig von der angehängten Last. Abbildung 3 zeigt eine solche *ideale Stromquelle*.

Reale Stromquellen

In der Realität gibt es keine *idealen Stromquellen*, denn *Energievorräte* sind immer begrenzt. Eine *reale Stromquelle* wird deshalb als *Parallelschaltung* einer *idealen Stromquelle* I_0 und einem **Innenleitwert** G_i modelliert, damit man den Einfluss der angeschlossenen Last auf den tatsächlich erzeugten *Strom* miteinbeziehen kann. Abbildung 4 zeigt eine solche *reale Stromquelle*.
Die *Kennlinie* einer *realen Stromquelle* ist gegeben durch:

$$I(U) = I_0 - G_i \cdot U \tag{20}$$

Quellenumwandlung

Vergleichen wir (19) und (20), so ist leicht festzustellen, dass beide Quellen von aussen betrachtet äquivalent sind. Sie können also ohne die eigentliche Schaltung zu ändern mit folgenden Formeln ineinander umgewandelt werden:

$$R_i = \frac{1}{G_i} \tag{21}$$

$$U_0 = \frac{I_0}{G_i} \tag{22}$$

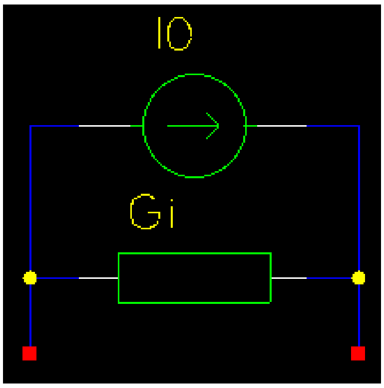


Abbildung 4: Eine reale Stromquelle

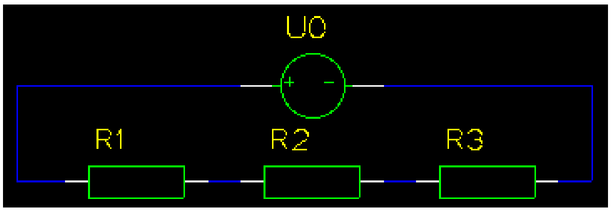


Abbildung 5: Eine Serieschaltung mit drei Widerständen

Achtung: Zeichnet man Spannungs- und Strompfeile immer so, dass sie einen positiven Betrag haben, so muss man die Richtung des Quellenpfeils bei einer *Quellenumwandlung* umkehren.

Leistungsanpassung

Möchte man aus einer *realen Spannungsquelle* (oder analog aus einer *realen Stromquelle*, siehe *Quellenumwandlung* (21)+(22)) die maximale **Lastleistung** P_L herausholen, so muss man den **Lastwiderstand** R_L dem *Innenwiderstand* R_i der *Spannungsquelle* anpassen. Die *Lastleistung* abhängig von R_L ergibt sich zu:

$$P_L = \frac{U_0^2 \cdot R_L}{(R_i + R_L)^2} \tag{23}$$

Maximiert man P_L über R_L, so erhält man als optimalen *Lastwiderstand*:

$$R_L = R_i \tag{24}$$

Dies ergibt eine optimale *Lastleistung* von:

$$P_{Lmax} = \frac{U_0^2}{4R_i} \tag{25}$$

Serieschaltung

Es werden n *Widerstände* R_k in *Serie geschaltet*. Wenn wir diese n *Widerstände* als einen einzigen, grossen Verbraucher betrachten, so hat dieser den *Widerstand*:

$$R_{ges} = \sum_{k=1}^{n} R_k = R_1 + R_2 + \ldots + R_n \tag{26}$$

Der durchfliessende *Strom* bleibt innerhalb einer *Serieschaltung* konstant. Abbildung 5 zeigt eine solche *Serieschaltung*.

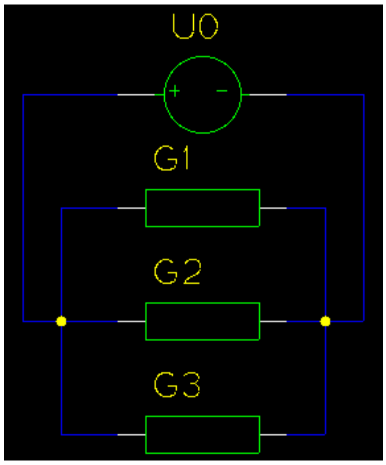


Abbildung 6: Eine Parallelschaltung mit drei Widerständen

Spannungsteilung

Für n an der *Spannung* U in *Serie geschaltete Widerstände* R_k resultiert die *Spannung* U_k über diesen zu:

$$\frac{U_k}{U} = \frac{R_k}{R} \tag{27}$$

Parallelschaltung

Es werden n *Widerstände* mit *Leitwerten* G_k *parallel zueinander geschaltet*. Wenn wir diese n *Widerstände* als einen einzigen, grossen Verbraucher betrachten, so hat dieser den *Leitwert*:

$$G_{ges} = \sum_{k=1}^{n} G_k = G_1 + G_2 + \ldots + G_n \tag{28}$$

Die resultierende *Spannung* bleibt innerhalb einer *Parallelschaltung* konstant. Abbildung 6 zeigt eine solche *Parallelschaltung*.

Stromteilung

Für n an dem *Strom* I *parallel geschaltete Widerständen* mit *Leitwerten* G_k teilen sich die *Ströme* durch diese *Widerstände* auf zu:

$$\frac{I_k}{I} = \frac{G_k}{G} \tag{29}$$

Übertragsfunktion

Betrachtet man ein Netzwerk aus Verbrauchern als eigenständiges Bauteil, so lässt sich sein Verhalten von aussen gesehen durch eine *Übertragsfunktion* darstellen.

Spannungsübertragungsfunktion F_U

Sei U_{in} die *Eingangsspannung* und U_{out} die *Ausgangsspannung* des Bauteils. Dann ist die *Spannungsübertragungsfunktion*:

$$F_U = \frac{U_{out}}{U_{in}} \tag{30}$$

Stromübertragungsfunktion F_I

Sei I_{in} der *Eingangsstrom* und I_{out} der *Ausgangsstrom* des Bauteils. Dann ist die *Stromübertragungsfunktion*:

$$F_I = \frac{I_{out}}{I_{in}} \tag{31}$$

Ersatzzweipolquellen

Thevenin-Ersatzschaltung

Möchte man das Verhalten einer komplexen Schaltung an zwei Klemmen betrachten, so kann man diese als einfache *reale Spannungsquelle* modellieren. Ihr *Innenwiderstand* ergibt sich, wenn man einfach alle *Spannungsquellen* der Schaltung durch Kurzschlüsse und alle *Stromquellen* durch Leerläufe ersetzt. Die Ersatzschaltung (die nur noch aus einer *realen Spannungsquelle* besteht) nennt man *Thevenin-Ersatzschaltung*.

Norton-Ersatzschaltung

Möchte man das Verhalten einer komplexen Schaltung an zwei Klemmen betrachten, so kann man diese als einfache *reale Stromquelle* modellieren. Ihr *Innenleitwert* ergibt sich, wenn man einfach alle *Spannungsquellen* der Schaltung durch Kurzschlüsse und alle *Stromquellen* durch Leerläufe ersetzt. Die Ersatzschaltung (die nur noch aus einer *realen Stromquelle* besteht) nennt man *Norton-Ersatzschaltung*.

Superpositionsprinzip

In einem *linearen Netzwerk* lassen sich *Ströme* durch und *Spannungen* über Teilnetzwerken (bis zu einzelnen *Widerständen*) berechnen, indem man für jede Quelle jeweils alle bis auf diese durch Kurzschlüsse (bei *Spannungsquellen*) oder durch Leerläufe (bei *Stromquellen*) ersetzt, die entstehende Schaltung berechnet und dann die entstehenden *Teilströme* und *Teilspannungen* addiert.

Maschenstromanalyse

Möchte man *Teilströme* eines komplexen *linearen Netzwerks* berechnen, so kann man die Methode der *Maschenstromanalyse* anwenden. Dabei geht man wie folgt vor:

1. Alle *Stromquellen* in *Spannungsquellen* umwandeln

2. Für jede Masche des Netzwerks eine Umlaufrichtung festlegen und damit die *Maschenströme* definieren

3. Gleichungssystem aufstellen:

$$\mathbf{R} \cdot \vec{I} = \vec{U} \tag{32}$$

Dabei ist I_i der *Maschenstrom* der i-ten Masche (in Umlaufrichtung) und U_i die Summe aller *Spannungsquellen* der i-ten Masche (gegen die Umlaufrichtung). Für $\mathbf{R}$ gilt:

$$\mathbf{R}_{ij} = \begin{cases} i = j & \text{Summe aller Widerstände der } i\text{-ten Masche} \\ i \neq j & \text{Summe aller Widerstände zwischen } i\text{-ter und } j\text{-ter Masche, negatives Vorzeichen bei gegensätzlicher Umlaufrichtung} \end{cases} \tag{33}$$

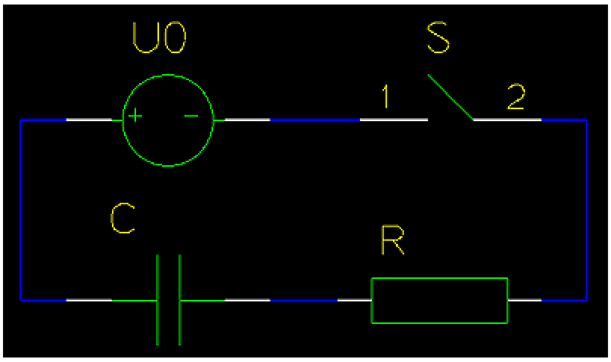


Abbildung 7: Ladeschaltung für einen Kondensator

4. Gleichungssystem mit Gauss'schem Eliminationsverfahren lösen

5. *Zweigströme* aus Summe der angrenzenden *Maschenströme* berechnen (in Umlaufrichtung)

Knotenpotentialanalyse

Möchte man Teilspannungen eines komplexen *linearen Netzwerks* berechnen, so kann man die Methode der *Knotenpotentialanalyse* anwenden. Dabei geht man wie folgt vor:

1. Alle *Spannungsquellen* in *Stromquellen* umwandeln

2. Auswahl eines Bezugsknotens (für diesen wählt man das *Potential* 0)

3. Gleichungssystem aufstellen:

$$\mathbf{G} \cdot \vec{U} = \vec{I} \tag{34}$$

Dabei ist U_i das *Knotenpotential* des i-ten Knotens bzw. die Spannung zwischen dem i-ten Knoten und dem Bezugsknoten und I_i die Summe aller *Stromquellen*, die in den Knoten hineinfliessen (negatives Vorzeichen bei Wegfliessen). Für $\mathbf{G}$ gilt:

$$\mathbf{G}_{ij} = \begin{cases} i = j & \text{Summe aller Leitwerte um den } i\text{-ten Knoten} \\ i \neq j & \text{negierte Summe aller Leitwerte in Zweigen zwischen } i\text{-tem und } j\text{-tem Knoten} \end{cases} \tag{35}$$

4. Gleichungssystem mit Gauss'schem Eliminationsverfahren lösen

5. *Zweigspannungen* aus den einzelnen *Knotenpotentialen* berechnen.

Laden eines Kondensators

Sei eine Ladeschaltung für einen *Kondensator* wie in Abbildung 7 gegeben, bei welchem zum Zeitpunkt $t = 0$ der *Kondensator* entladen ist und der Schalter S geschlossen wird. Für den *Strom* im *Kondensator* gilt:

$$Q = C \cdot U \Rightarrow i_C(t) = C \cdot \frac{\partial u_c}{\partial t} \tag{36}$$

Unter Verwendung von (9) gilt nun:

$$u_R(t) = R \cdot i_R(t) = R \cdot i_C(t) = RC \cdot \frac{\partial u_c}{\partial t} \tag{37}$$

Jetzt kann man (18) anwenden und einsetzen:

$$U_0 = RC \cdot \frac{\partial u_c}{\partial t} + u_c \tag{38}$$

Die spezifische Lösung dieser Differentialgleichung lässt sich berechnen zu:

$$u_c(t) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \tag{39}$$

Dabei heisst das für den Anstieg der Exponentialfunktion verantwortliche Produkt $\tau = RC$ *Zeitkonstante* der Ladeschaltung.

Dynamische Netzwerke

Wechselspannung

Unterliegt die *Spannung* einer *Quelle* einer Sinusschwingung mit Amplitude $\hat{U}$ und der Frequenz f bzw. der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi f$ und dem Phasenwinkel φ_0, so nennt man diese *Wechselspannung*. Aus Gründen der einfacheren Berechenbarkeit wird sie als komplexe Funktion dargestellt:

$$u(t) = \hat{U} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_0)} = \hat{U} \cdot e^{j\varphi_0} \cdot e^{j\omega t} = \underline{U} \cdot e^{j\omega t} \tag{40}$$

Die Grösse $\underline{U}$ heisst **komplexe Amplitude** von $u(t)$. Sie bezeichnet die komplexe Richtung der *Spannung* zum Startzeitpunkt $t = 0$ und vereint damit die (reelle) Amplitude $\hat{U}$ und den Phasenwinkel φ_0:

$$\hat{U} = |\underline{U}| \tag{41}$$

$$\varphi_0 = \arg(\underline{U}) \tag{42}$$

Mit Hilfe dieser Definitionen lässt sich nun die reale *Spannung* der *Quelle* leicht darstellen als:

$$U(t) = \Re\{u(t)\} \tag{43}$$

Wechselstrom

Unterliegt der *Strom* einer *Quelle* einer Sinusschwingung mit Amplitude $\hat{I}$ und der Frequenz f bzw. der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi f$ und dem Phasenwinkel φ_0, so nennt man diesen *Wechselstrom*. Aus Gründen der einfacheren Berechenbarkeit wird er als komplexe Funktion dargestellt:

$$i(t) = \hat{I} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_0)} = \hat{I} \cdot e^{j\varphi_0} \cdot e^{j\omega t} = \underline{I} \cdot e^{j\omega t} \tag{44}$$

Die Grösse $\underline{I}$ heisst **komplexe Amplitude** von $i(t)$. Sie bezeichnet die komplexe Richtung des *Stroms* zum Startzeitpunkt $t = 0$ und vereint damit die (reelle) Amplitude $\hat{I}$ und den Phasenwinkel φ_0:

$$\hat{I} = |\underline{I}| \tag{45}$$

$$\varphi_0 = \arg(\underline{I}) \tag{46}$$

Mit Hilfe dieser Definitionen lässt sich nun der reale *Strom* der *Quelle* leicht darstellen als:

$$I(t) = \Re\{i(t)\} \tag{47}$$

Impedanz

Das Verhältnis zwischen den *komplexen Amplituden* der *Spannung* und des *Stroms* eines dynamischen Netzwerks heisst *Impedanz* $\underline{Z}$:

$$\underline{U} = \underline{Z}(\omega) \cdot \underline{I} \tag{48}$$

Der Kehrwert der *Impedanz* heisst **Admittanz** $\underline{Y}$. Es gilt dementsprechend:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} \tag{49}$$

$$\underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{U} \tag{50}$$

Analogie: *Widerstand* und *Leitwert* im linearen Netzwerk $\leftrightarrow$ *Impedanz* und *Admittanz* im dynamischen Netzwerk. So lassen sich in folgenden Formeln *Widerstände* und *Leitwerte* durch die entsprechenden *Impedanzen* und *Admittanzen* ersetzen, wenn man mit dynamischen Netzwerken rechnet:

- Kirchhoffsche Knoten- (17) und Maschenregel (18)
- Serieschaltung (26) und Parallelschaltung (28)
- Spannungsteilung (27) und Stromteilung (29)

Widerstand (im dynamischen Netzwerk)

Die *Impedanz* eines *Widerstands* in einem dynamischen Netzwerk ist gleich seinem Betrag:

$$\underline{Z} = R \tag{51}$$

Spule

Induktivität L

Eine *Spule* wird durch ihre *Induktivität* L charakterisiert. Die einfachste Spule lässt sich durch Aufwickeln eines Leiters herstellen, deren durchfliessender *Strom* in ihrem Innern ein magnetisches Feld erzeugt, in welchem ihre *Energie* gespeichert wird. Die *Induktivität* einer solchen Spule ist gegeben durch:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} \tag{52}$$

Impedanz

Die *Impedanz* einer *Spule* mit *Induktivität* L ergibt sich zu:

$$\underline{Z} = j\omega L \tag{53}$$

Serieschaltung

Spulen verhalten sich geschaltet analog zu *Widerständen*. Für *in Serie geschaltete Spulen* L_i gilt:

$$L_{ges} = L_1 + L_2 + \ldots + L_n \tag{54}$$

Parallelschaltung

Für *parallel geschaltete Spulen* L_i gilt:

$$\frac{1}{L_{ges}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots \frac{1}{L_n} \tag{55}$$

Kondensator

Kapazität C

Ein *Kondensator* wird durch seine *Kapazität* C charakterisiert. Der einfachste *Kondensator* lässt sich mit zweien durch eine Luftschicht getrennten Metallplatten herstellen, zwischen welchen ein *elektrisches Feld* erzeugt wird, in welchem der *Kondensator Energie* speichert. Die *Kapazität* eines solchen *Kondensators* ist gegeben durch:

$$C = \frac{\varepsilon A}{d} \tag{56}$$

Impedanz

Die *Impedanz* eines *Kondensators* mit *Kapazität* C ergibt sich zu:

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} \tag{57}$$

Serieschaltung

Kondensatoren verhalten sich geschaltet gerade umgekehrt wie *Widerstände* und *Spulen*. Für *in Serie geschaltete Kondensatoren* C_i gilt:

$$\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots \frac{1}{C_n} \tag{58}$$

Parallelschaltung

Für *parallel geschaltete Kondensatoren* C_i gilt:

$$C_{ges} = C_1 + C_2 + \ldots + C_n \tag{59}$$

Resonanzkreise

Schaltet man einen *Widerstand*, eine *Spule* und einen *Kondensator in Reihe* oder *parallel*, so heisst die entstandene Schaltung *Resonanzkreis*. Sie ist schwingungsfähig und hat bei ihrer **Resonanzwinkelgeschwindigkeit** ω_0 minimale *Impedanz* (Serie) bzw. *Admittanz* (parallel) und die *Phase* Null. So gilt im *Serieresonanzkreis*:

$$\frac{1}{j\omega_0 C} + j\omega_0 L = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{60}$$

Das gleiche ω_0 erhält man analog für den *Parallelresonanzkreis*.

Güte ρ

Je schneller die *Impedanz* bzw. die *Admittanz* um die *Resonanzwinkelgeschwindigkeit* ω_0 abfällt, desto länger schwingt der Kreis nach seiner Anregung weiter. Die *Güte* eines Schwingkreises beschreibt, welcher Anteil der im Schwingkreis gespeicherten Energie pro Schwingung verloren geht. Je grösser die Güte, desto weniger geht verloren.
Um die Güte zu berechnen, kann man auch die beiden Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 bestimmen, bei welchen die *Impedanz* oder die *Admittanz* wieder auf das $\sqrt{2}$-fache des minimalen Wert gestiegen ist. Dann gilt für die *Güte*:

$$\rho = \frac{\sqrt{\omega_1 \omega_2}}{\omega_2 - \omega_1} \tag{61}$$

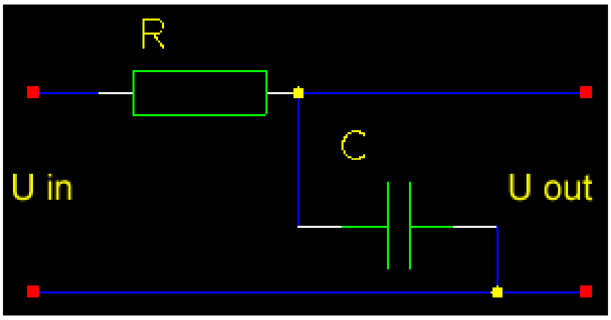


Abbildung 8: Ein RC-Tiefpassfilter

Wendet man dies auf den *Serie-Resonanzkreis* an, so ergibt sich für die *Güte*:

$$\rho = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{62}$$

Analog bekommt man für den *Parallel-Resonanzkreis*:

$$\rho = R\sqrt{\frac{C}{L}} \tag{63}$$

Zweitor

Ein Bauteil mit zwei Eingangsklemmen mit anliegender *Spannung* $\underline{U}_{in}$ und zwei Ausgangsklemmen mit *Spannung* $\underline{U}_{out}$ heisst *Zweitor*. Es wird durch seine **Übertragsfunktion** charakterisiert:

$$\underline{F}(\omega) = \frac{\underline{U}_{out}}{\underline{U}_{in}} \tag{64}$$

Ein **Filter** ist ein *Zweitor*, welche Signale bestimmter Frequenzen blockt, andere jedoch ungefiltert durchlässt.

Tiefpass

Ein *Tiefpass* ist ein *Zweitor*, welches niedrige Frequenzanteile ungehindert passieren lässt und hohe Frequenzanteile abblockt. In Abbildung 8 ist ein RC-*Tiefpass* abgebildet, welcher folgende *Übertragsfunktion* hat:

$$\underline{F}(\omega) = \frac{1}{j\omega RC + 1} \tag{65}$$

Bei der Winkelgeschwindigkeit ω_{3dB}, an welcher die *Übertragsfunktion* auf die Hälfte ihres Werts bei $\omega = 0$ abgefallen ist, beginnt sie dabei gegen $\omega \to \infty$ exponentiell zu fallen. Für den RC-*Tiefpass* in Abbildung 8 gilt:

$$\omega_{3dB} = \frac{1}{RC} \tag{66}$$

Hochpass

Ein *Hochpass* ist, analog zum *Tiefpass*, ein *Zweitor*, welches hohe Frequenzanteile ungehindert passieren lässt und tiefe Frequenzanteile abblockt. In Abbildung 9 ist ein RC-*Hochpass* abgebildet, welcher folgende *Übertragsfunktion* hat:

$$\underline{F}(\omega) = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega RC} \tag{67}$$

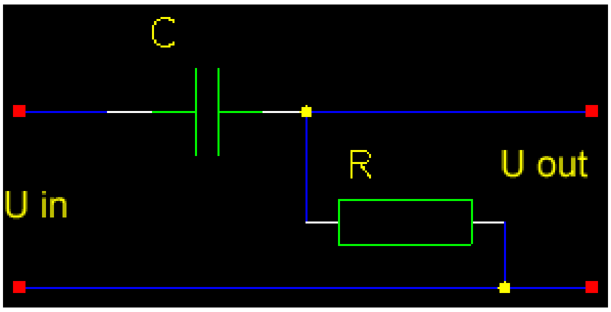


Abbildung 9: Ein RC-Hochpassfilter

Bei der Winkelgeschwindigkeit ω_{3dB}, an welcher die *Übertragsfunktion* auf die Hälte ihres Werts bei $\omega = \infty$ abgefallen ist, beginnt sie dabei gegen $\omega \to 0$ exponentiell zu fallen. Für den RC-*Hochpass* in Abbildung 9 gilt:

$$\omega_{3dB} = \frac{1}{RC} \tag{68}$$

Bandpass

Ein *Bandpass* ist ein *Zweitor*, welcher nur ein bestimmtes Frequenzintervall ungefiltert durchlässt und sowohl hohe wie auch tiefe Frequenzen abblockt.

Leistung (im dynamischen Netzwerk)

Da in einem dynamischen Netzwerk sowohl *Strom* wie auch *Spannung* einer Schwingung unterlegen sind, muss man auch die *Leistung* durch eine solche ausdrücken:

$$\begin{aligned} P(t) &= U(t) \cdot I(t) && (69)\\ &= \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \cos(\omega t + \varphi_U)\cos(\omega t + \varphi_I) && (70)\\ &= \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2}\left(\cos(\varphi_U - \varphi_I) + \cos(2\omega t + \varphi_U + \varphi_I)\right) && (71)\\ &= U_e \cdot I_e \cdot \left(\cos(\varphi_U - \varphi_I) + \cos(2\omega t + \varphi_U + \varphi_I)\right) && (72) \end{aligned}$$

$U_e = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$ und $I_e = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}$ heissen dabei **effektive Spannung** bzw. **effektiver Strom**. Der erste Summand aus Gleichung (72) ist der tatsächlich messbare und heisst **Wirkleistung**:

$$P = U_e \cdot I_e \cdot \cos(\varphi_U - \varphi_I) \tag{73}$$

Die **Scheinleistung** S und die **Blindleistung** Q sind definiert als:

$$\begin{aligned} S &= U_e \cdot I_e && (74)\\ Q &= \sqrt{S^2 - P^2} && (75) \end{aligned}$$

Wieder lassen sich nun komplexe Zahlen herbeiziehen, um diese Berechnungen deutlich zu vereinfachen. Die **komplexe Leistung** ist definiert als:

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \frac{u(t) \cdot \overline{i(t)}}{2} && (76)\\ &= \frac{\underline{U} \cdot e^{j\omega t} \cdot \overline{\underline{I} \cdot e^{j\omega t}}}{2} && (77)\\ &= \frac{\underline{U} \cdot \overline{\underline{I}}}{2} && (78)\\ &= P + j \cdot Q && (79) \end{aligned}$$

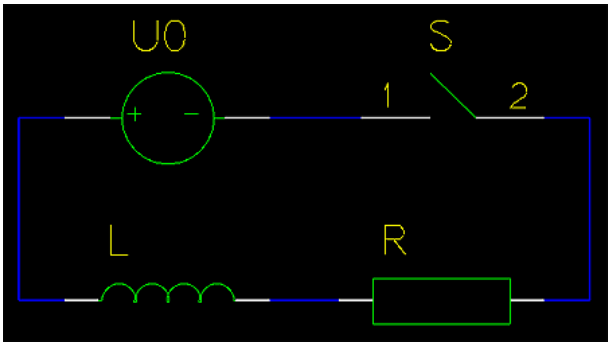


Abbildung 10: Schaltung mit Einschaltstromspitze

Wichtig ist es, zu beachten, dass die *komplexe Leistung* $\underline{S}$ eine zeitlich invariante Grösse ist. Nun kann man *Schein-*, *Blind-* und *Wirkleistung* durch $\underline{S}$ ausdrücken:

$$\begin{aligned} S &= |\underline{S}| && (80)\\ Q &= \Im\{\underline{S}\} && (81)\\ P &= \Re\{\underline{S}\} && (82) \end{aligned}$$

Ist $Q > 0$, so spricht man von einer **induktiven Leistung**, ist $Q < 0$, von einer **kapazitiven Leistung**.

Stromspitzen bei Einschaltvorgängen

Betrachte eine Schaltung wie in Abbildung 10 mit *Spannung* $U_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi_U)$. Für den Strom in der Spule gilt:

$$\Phi = L \cdot I \Rightarrow u_L = L \cdot \frac{\partial i_L}{\partial t} \tag{83}$$

Analog zu (37)ff. ergibt sich nun unter Anwendung von (9) und (18) folgende Differentialgleichung:

$$U_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi_U) = R \cdot i_L + L \cdot \frac{\partial i_L}{\partial t} \tag{84}$$

Auflösung nach dem *Strom* i_L ergibt:

$$\begin{aligned} i_L(t) = |\underline{I}| \cdot \sin(\omega t + \arg(\underline{I})) - |\underline{I}| \cdot \sin(\arg(\underline{I})) \cdot e^{-\frac{R \cdot t}{L}} && (85)\\ \underline{U} = U_0 \cdot e^{j\left(\varphi_U - \frac{\pi}{2}\right)} && (86)\\ \underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + j \cdot \omega \cdot L} && (87)\\ \arg(\underline{I}) = \varphi_U - \frac{\pi}{2} && (88) \end{aligned}$$

Wird nun der Schalter beim Nulldurchlauf der *Spannung* geschlossen ($\varphi_U = n \cdot \pi$), so ergibt sich eine Stromspitze, bis sich das System eingependelt hat.

Halbleiterbauelemente

Diode

Ideale Diode

Eine *ideale Diode* ist ein Bauelement, welches sich je nach angelegter *Spannung* wie ein Leiter oder wie ein Isolator verhält. Für *Diodenspannungen* unter einer **Durchlassspannung** U_F beträgt der **Durchlassstrom** I_D also Null, für solche darüber hat er einen positiven Wert.
Abbildung 11 zeigt das Schaltbild einer *Diode*. Sie blockt ab von der **Kathode** K zur **Anode** A und lässt in umgekehrter Richtung durch.

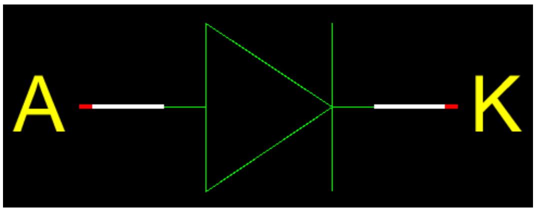


Abbildung 11: Schaltbild einer Diode

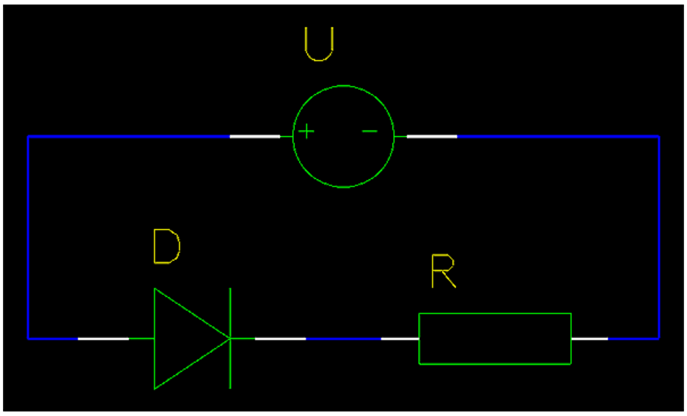


Abbildung 12: Eine Gleichrichterschaltung

Reale Diode

Bei einer *realen Diode* steigt dessen *Kennlinie* exponentiell und lässt über ihrer *Durchlassspannung* einen nennenswerten *Strom* durch. Diese Steigung wird durch den Kennwert U_T der Diode charakterisiert. *Reale Dioden* haben auch die Eigenschaft, nicht beliebig kleine *Spannungen* blocken zu können: Ab einem gewissen (negativen) Wert, der **Durchbruchsspannung**, können sie dem Druck nicht mehr standhalten und leiten schlagartig einen Strom in Gegenrichtung.

Gleichrichterschaltungen

Im allgemeinen werden *Dioden* dazu verwendet, *Wechselströme* gleichzurichten. Eine sehr einfache *Gleichrichterschaltung* wie in Abbildung 12 nutzt die Eigenschaften der *Diode* dazu aus, nur die positiven Wellenbäuche einer *Wechselspannungsquelle* durchzulassen.

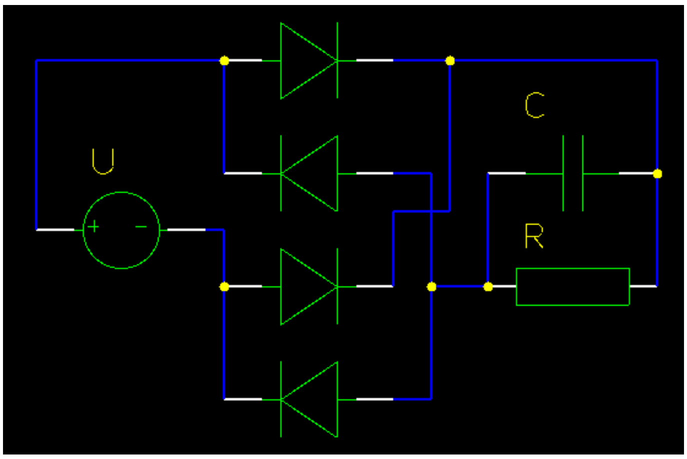


Abbildung 13: Ein Brückengleichrichter

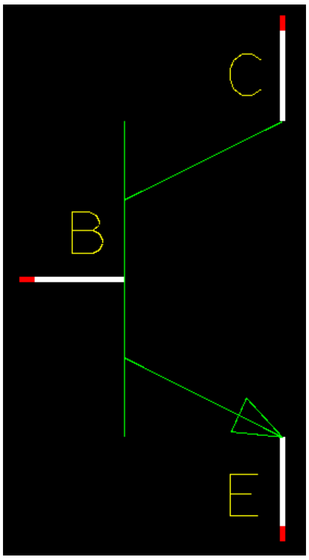


Abbildung 14: npn-Transistor

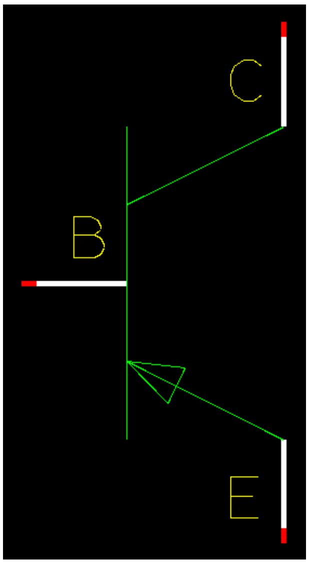


Abbildung 15: pnp-Transistor

Da mit einer solchen Schaltung die *Spannung* zwischen zwei positiven Wellenbäuchen verschwindet, kann man noch eine *Kapazität C parallel dazuschalten*, welche dann die *Spannungskurve* etwas glättet, da sie in diesen Nullzeiträumen jeweils entladen wird.
Um nun auch die negativen Wellenbäuche der *Wechselspannungsquelle* ausnutzen zu können, verwendet man eine **Brückengleichrichterschaltung** wie in Abbildung 13. Wieder ist ein *Kondensator* parallel geschaltet, um die Kurve zusätzlich zu glätten.

Bipolartransistor

Ein *Bipolartransistor* ist ein Halbleiterbauelement mit drei Anschlüssen: Der **Basis** B, dem **Emitter** E und dem **Kollektor** C. Er wird zum Verstärken und zum Schalten von Signalen eingesetzt und existiert in zwei Ausführungen, dem **npn-Transistor** (Abbildung 14) und dem **pnp-Transistor** (Abbildung 15). Die folgenden Berechnungen beziehen sich auf den *npn-Transistor*, sind aber mit umgekehrtem Vorzeichen analog auch auf den *pnp-Transistor* anwendbar. Legt man zwischen *Basis* und *Emitter* eine bauteilspezifische, bestimmte **Basis-Emitter-Spannung** U_{BE} an, welche dem Kennwert U_D der **Basis-Emitter-Diode** entspricht und meist aus einem entsprechenden *Kennliniendiagramm* dieser Diode abgelesen werden kann, so bezieht der *Transistor* bei einer genügend grossen *Kollektor-Emitter-Spannung* U_{CE} einen zum eingespiesenen **Basisstrom** I_B proportionalen **Kollektorstrom** I_C:

$$I_C = h_{fE} \cdot I_B \tag{89}$$

Der Faktor h_{fE} heisst **statische Stromverstärkung** des *Transistors* und liegt bei üblichen Bauteilen zwischen 10 und 100. Sie stellt gerade den Proportionalitätsfaktor dar, wenn man den Transistor (im *Normalbetrieb*) als *stromgesteuerte Stromquelle* betrachtet. Möchte man ihn als *spannungsgesteuerte Stromquelle* betrachten, so benutzt man die **Steilheit** S:

$$S = \frac{\partial I_C}{\partial U_{BE}} = \frac{h_{fE}}{r_{BE}} \tag{90}$$

Dabei bezeichnet r_{BE} den **differentiellen Widerstand**, welcher die durchlassende *Basis-Emitter-Diode* im *Normalbetrieb* modelliert:

$$r_{BE} = \frac{\partial U_{BE}}{\partial I_B} = \frac{U_T}{I_B} \tag{91}$$

Arbeitsbereiche

Neben dem beschriebenen **Normalbetrieb** eines *Bipolartransistors* gibt es noch zwei Grenzfälle:

- Ist die *Basis-Emitter-Spannung* zu klein, befindet sich der *Transistor* im **Cutoff-Bereich**, sperrt also die Ausgänge ab und es fliesst kein *Kollektorstrom* I_C
- Ist die *Kollektor-Emitter-Spannung* zu klein, so ist die Proportionalität aus (89) nicht mehr gegeben und es fliesst nur noch ein sehr kleiner *Kollektorstrom* I_C.

Um diese Grenzfälle zu vermeiden, wählt man in der Regel einen möglichst gut dazwischenliegenden *Arbeitsbereich* innerhalb des *Normalbetriebs* um einen **Arbeitspunkt** herum. Dazu schneidet man beim Beispiel einer *Emitterschaltung* wie in Abbildung 16 die *Kennlinien* des *Kollektors* (U_0 mit *Kollektorwiderstand* R_C) und des *Transistors* und wählt den Schnittpunkt, welcher am nächsten zur Mitte zwischen den Grenzfällen liegt.
Ein *Arbeitspunkt* A wird also charakterisiert durch die beiden *Spannungen* $U_{BE,A}$ und $U_{CE,A}$ sowie die *Ströme* $I_{C,A}$ und $I_{B,A}$.

Transistorschaltungen

Grundsätzlich kann ein *Bipolartransistor* auf drei verschiedene Arten sinnvoll beschaltet werden, je nach dem, welche der drei Pole man als Bezugspunkt wählt.

Emitterschaltung

Bei der *Emitterschaltung* wird der *Emitter* auf Masse gelegt. *Emitterschaltungen* werden dazu eingesetzt, niederfrequente *Signalspannungen* zu verstärken. Abbildung 16 zeigt eine solche Schaltung, welche zur Verstärkung von *Wechselstromsignalen* eingesetzt wird. U_0 ist eine *Gleichspannungsquelle* und

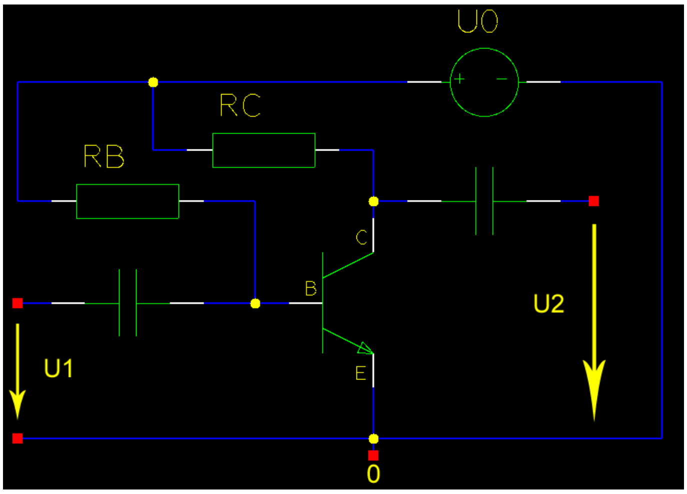


Abbildung 16: Eine Emitterschaltung zur Verstärkung von Wechselstromsignalen

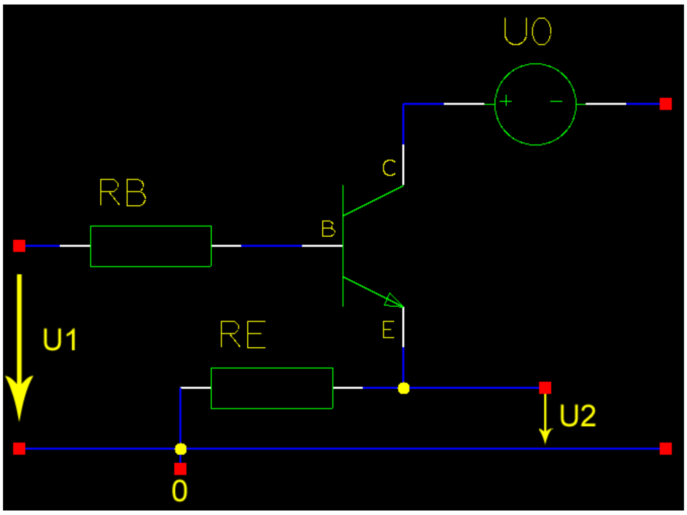


Abbildung 17: Eine Kollektorschaltung

die beiden *Kapazitäten* werden als sehr gross angenommen. Die Schaltung hat die Verstärkung:

$$v = \frac{U_2}{U_1} = -\frac{h_{fE} \cdot R_C}{r_{BE}} \tag{92}$$

Bei der Schaltung wurde U_0 über einen *Basiswiderstand* R_B auch an die *Basis* angeschlossen, damit der *Strom* I_B durch den *Transistor* nie negativ wird, wenn man von U_1 aus *Wechselstromsignale* überträgt.

Kollektorschaltung

Bei der *Kollektorschaltung* wie in Abbildung 17 gezeigt wählt man den Ausgangspol hinter dem *Emitter*. Die Spannungsverstärkung einer *Kollektorschaltung* beträgt ungefär:

$$v = \frac{U_2}{U_1} \approx 1 \tag{93}$$

Kollektorschaltungen eignen sich deshalb nicht als Verstärker, sondern werden als *Impedanzwandler* eingesetzt. Wie bei der in Abbildung 16 liessen sich auch hier noch *Kapazitäten* dazuschalten, um *Wechselspannungen* umwandeln zu können.

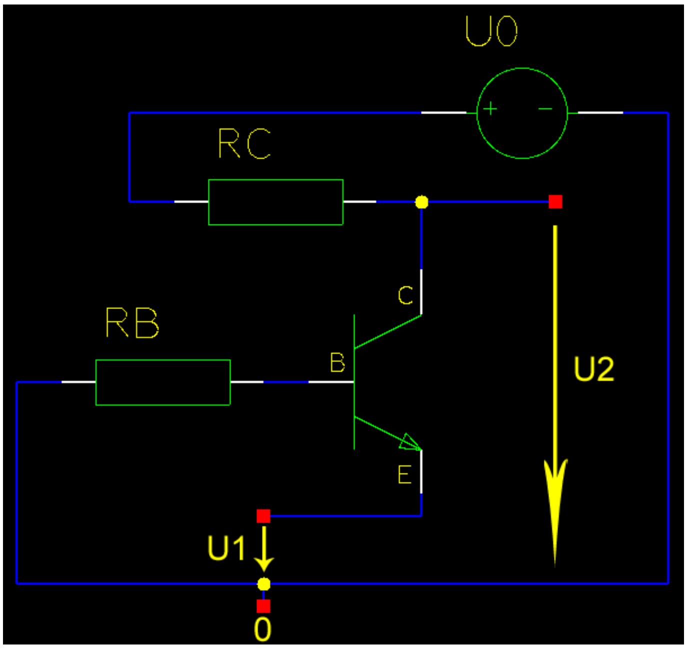


Abbildung 18: Eine Basisschaltung

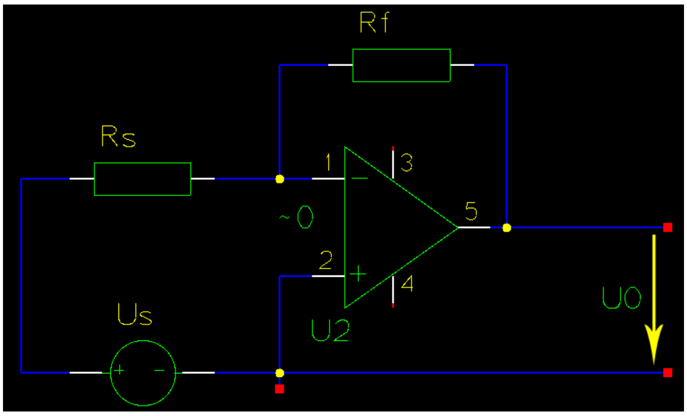


Abbildung 19: Invertierender Verstärker

Basisschaltung

Wählt man die *Basis* als Bezugspunkt, den *Emitter* als Eingang und den *Kollektor* als Ausgang, so bekommt man eine *Basisschaltung* wie in Abbildung 18. Schaltet man noch geeignete *Koppelkondensatoren* wie in Abbildung 16 dazu, so erreicht man *Wechselspannungsverstärkungen* von 100 bis 1000.

Operationsverstärker

Da *Bipolartransistoren* in vieler Hinsicht nicht optimal sind (da sie zum Beispiel *Leistung* verbrauchen), kann man viele *Transistoren* speziell hintereinanderschalten, um einen *Operationsverstärker* mit möglichst idealen Eigenschaften zu erhalten. Ein idealer *Operationsverstärker* hat eine *Gleichstromverstärkung* von ∞ oder zumindest eine sehr grosse von mehreren Zehntausend, was dazu führt, dass er jedes Eingangssignal sehr gut digitalisiert bzw. in eine "grosse *Rechtecksspannung*" (mit Amplitude U_0 der *Betriebsspannung*) umwandelt.

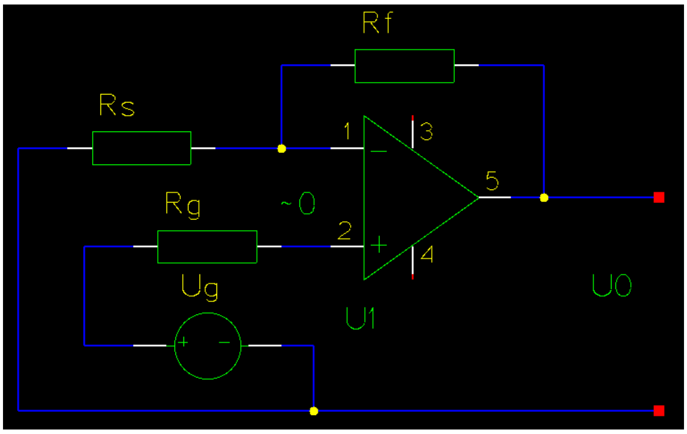


Abbildung 20: Nichtinvertierender Verstärker

Invertierender Verstärker

Führt man den Ausgang eines *Operationsverstärkers* wie in Abbildung 19 über einen *Widerstand* R_f per Gegenkopplung an den negativen Eingang zurück, so bekommt man zwischen den beiden Eingängen eine *Spannung* ≈ 0. Die Abfolge $U_{ein} \to I_{ein} \to I_{gegen} \to U_{aus}$ sorgt nun am Ausgang U_0 für eine beliebig einstellbare negative Verstärkung von:

$$v = \frac{U_0}{U_s} = -\frac{R_f}{R_s} \tag{94}$$

Nichtinvertierender Verstärker

Der *nichtinvertierende Verstärker* aus Abbildung 20 verstärkt ein Signal aus einer *realen Spannungsquelle* U_g mit *Innenwiderstand* R_g. Für die beiden (zum negativen *Operationsverstärkereingang* gerichteten) *Ströme* I_s und I_f gilt $I_s = -I_f$. Daraus ergibt sich eine *Ausgangsspannung* U_0 und eine Verstärkung von:

$$v = \frac{U_0}{U_1} = 1 + \frac{R_f}{R_s} \tag{95}$$

Invertierender Addierer

Schaltet man mehrere *Eingangsspannungen* U_i über *Widerstände* R_i parallel und lässt aber sonst die Schaltung des *invertierten Verstärkers* aus Abbildung 19 bestehen, so erhält man einen *invertierten Addierer* mit:

$$I_f = I_1 + I_2 + \ldots + I_n \tag{96}$$

$$U_0 = -R_f \left(\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_3}{R_3} \right) \tag{97}$$

Subtrahierer

Eine Subtraktion lässt sich leicht mit einer *Serieschaltung* aus einem *Inverter* und einem *Addierer* realisieren. Möchte man nur einen *Operationsverstärker* verwenden, kann man auch einen *Subtrahierer* wie in Abbildung 21 verwenden. Setzt man alle *Widerstände* gleich, so ergibt sich:

$$U_0 = U_2 - U_1 \tag{98}$$

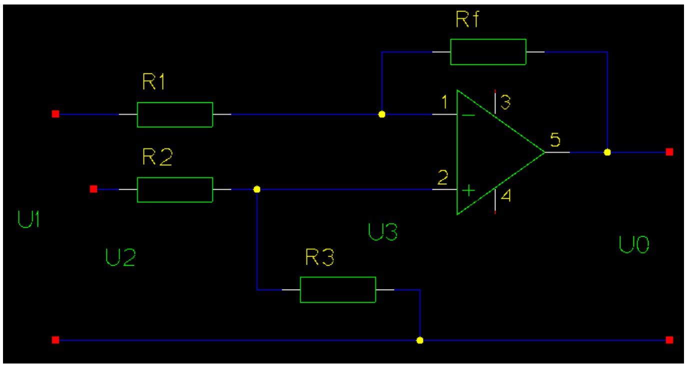


Abbildung 21: Subtrahierer

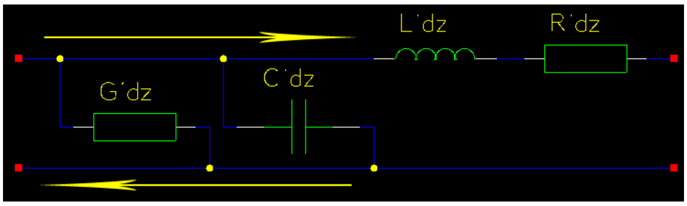


Abbildung 22: Ersatzschaltung eines Leiters

Integrierer

Wählt man für die Gegenkopplung des *invertierenden Verstärkers* aus Abbildung 19 eine *Kapazität* C_f anstatt des *Widerstands* R_f, so erhält man einen *Integrierer*. Sei der *Kondensator* zur Zeit t_0 ungeladen. Dann gilt:

$$U_0(t) = -\frac{1}{R_s C_f} \int_{t_0}^{t} U_s(t)\, dt \tag{99}$$

Analog lässt sich mit einer *Induktivität* ein Ableiter realisieren.

Leitungstheorie

Leitungsbeläge

Ein **realer Leiter**, wie in Abbildung 22 dargestellt, überträgt ein Signal nicht einfach unverändert von A nach B und zurück, sondern hat selbst einen *Widerstand* R. Zusätzlich ist die Isolation zwischen Hin- und Rückleiter nicht ideal, was zu einem *Zwischenleitwert* G führt. Ebenfalls kann ein Kabel Ladungen speichern, was durch eine zusätzliche *Kapazität* C und eine *Induktivität* L charakterisiert wird.
Um diese Grössen über eine *Leiterlänge* normen zu können, führt man die *Leitungsbeläge* ein:

$$R' = \frac{R}{d} \tag{100}$$

$$G' = \frac{G}{d} \tag{101}$$

$$C' = \frac{C}{d} \tag{102}$$

$$L' = \frac{L}{d} \tag{103}$$

Nun können die echten Werte wie in Abbildung 22 als Produkt der *Leitungsbeläge* mit der betrachteten Breite dz angegeben werden. Abbildung 23 listet die *Beläge* typischer *Leiter* auf.

Telegraphengleichungen

Mit der *Maschenregel* erhält man für die *Spannung* in Abbildung 22:

$$u(z,t) - u(z+dz,t) = R'dz\ i(z,t) + L'dz \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \tag{104}$$

Dividiert man durch $-dz$ und lässt $dz \to 0$ gehen, so erhält man den Differenzenquotienten:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\left(R'i + L'\frac{\partial i}{\partial t}\right) \tag{105}$$

Wendet man die *Knotenregel* für den *Strom* an, so erhält man:

$$i(z,t) - i(z+dz,t) = C'dz \frac{\partial u}{\partial t} + G'dz\ U \tag{106}$$

Dividiert man wieder durch $-dz$ und lässt $dz \to 0$ gehen, so erhält man den Differenzenquotienten:

$$\frac{\partial i}{\partial z} = -\left(G'\frac{\partial u}{\partial t} + C'\frac{\partial u}{\partial t}\right) \tag{107}$$

Die beiden Gleichungen (105) und (107) heissen *Telegraphengleichungen*. Setzt man sie ineinander ein, um sie zu entkoppeln, so erhält man:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = R'G'u + (R'C' + L'G')\frac{\partial u}{\partial t} + L'C'\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{108}$$

Setzt man eine *Wechselspannungsquelle* mit $\frac{\partial u}{\partial t} = j\omega u$ und $\frac{\partial u}{\partial t^2} = -\omega^2 u$ ein, so erhält man:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \underbrace{\left[-\omega^2 L'C' + j\omega\left(L'G' + R'C'\right) + R'G'\right]}_{\underline{\gamma}^2} \underline{U} \tag{109}$$

Dabei ist $\underline{\gamma}(\omega)$ die frequenzabhängige **Fortpflanzungskonstante**. Diese wird oft aufgeteilt in $\underline{\gamma} = \alpha + j \cdot \beta$, wobei α **Dämpfungskonstante** und β **Phasenkonstante** heisst.

Verlustlose Leitung

Eine *verlustlose Leitung* ist eine *Leitung* wie in Abbildung 22, bei welcher der *Widerstandsbelag* $R' = 0$ und der *Leitwertbelag* $G' = 0$ ist. Für die *Fortpflanzungskonstante* gilt:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = j\omega\sqrt{L'C'} \tag{110}$$

Die entkoppelte *Telegraphengleichungen* aus (109) und die analoge entkoppelte *Telegraphenleitung* für $\frac{\partial^2 i}{\partial z^2}$ vereinfachen sich zu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = L'C'\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{111}$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = L'C'\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \tag{112}$$

Diese haben die selbe Lösung wie die allgemeine homogene Wellengleichung, also:

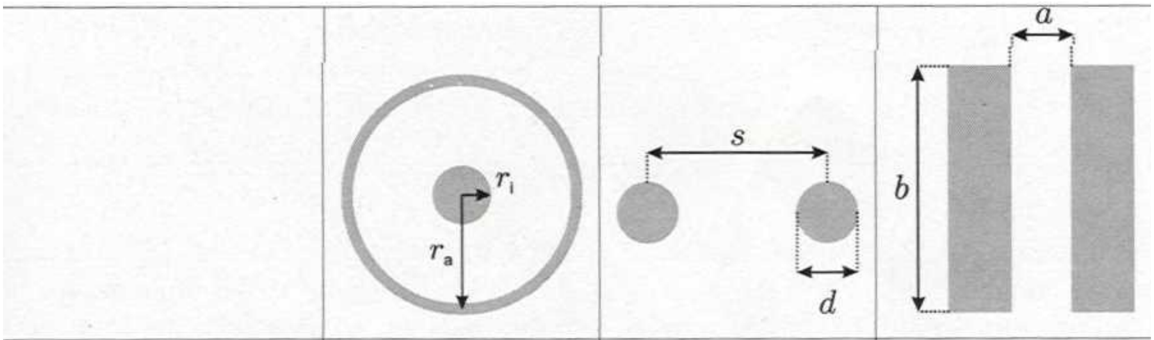
$$f(z,t) = f_0 \cdot \cos(\omega t \mp \beta z + \varphi) \tag{113}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{f}(z,t) = \underline{f_0} \cdot e^{j\omega t \mp j\beta z} \tag{114}$$

Dabei gilt für die *komplexe Amplitude* $\underline{f_0} = f_0 \cdot e^{j\varphi}$. Überträgt man f auf (111) und (112), so erhält man:

$$u(z,t) = \Re\left(\underline{U_0}^+ \cdot e^{j\omega t - j\beta z} + \underline{U_0}^- \cdot e^{j\omega t + j\beta z}\right) \tag{115}$$

$$i(z,t) = \Re\left(\underline{I_0}^+ \cdot e^{j\omega t - j\beta z} + \underline{I_0}^- \cdot e^{j\omega t + j\beta z}\right) \tag{116}$$



Widerstandsbelag R'	$\frac{R_s}{2\pi}\left(\frac{1}{R_a}+\frac{1}{R_i}\right)$	$\frac{R_s}{\pi d}\left(\frac{\frac{s}{d}}{\sqrt{\left(\frac{s}{d}\right)^2-1}}\right)$	$\frac{2R_s}{b}$
Leitwertbelag G'	$\frac{2\pi\sigma}{\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)}$	$\frac{\pi\sigma}{\cosh^{-1}\left(\frac{s}{d}\right)}$	$\frac{\sigma b}{a}$
Kapazitätsbelag C'	$\frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)}$	$\frac{\pi\epsilon}{\cosh^{-1}\left(\frac{s}{d}\right)}$	$\frac{\epsilon b}{a}$
Induktivitätsbelag L'	$\frac{\mu}{2\pi}\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)$	$\frac{\mu}{\pi}\cosh^{-1}\left(\frac{s}{d}\right)$	$\frac{\mu a}{b}$

Abbildung 23: Leitungsbeläge typischer Leiter

Verlustbehaftete Leitung

Eine *verlustbehaftete Leitung* ist eine *Leitung* wie in Abbildung 22, bei welcher der *Widerstandsbelag* $R' > 0$ und/oder der *Leitwertbelag* $G' > 0$ ist. Löst man die *Telegraphengleichung* ähnlich zum Fall für *verlustfreie Leiter* auf, so erhält man für die hinlaufende Welle ($\underline{U_0}^- = 0$):

$$\underline{u}(z,t) = e^{-\alpha z} \cdot \Re\left(\underline{U_0}^+ \cdot e^{j\omega t - j\beta z}\right) \tag{117}$$

Charakteristische Impedanz Z_0

Die *charakteristische Impedanz* bezeichnet das Verhältnis zwischen sich ausbreitenden *Strom-* und *Spannungswellen* in einem Leiter und ist gegeben durch:

$$\underline{Z}_0 = \frac{\underline{U}_0^+}{\underline{I}_0^+} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{\text{längs}}}{\underline{Y}_{\text{quer}}}} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} \tag{118}$$

Reflexion

Werden zwei unterschiedliche Leitungen miteinander verbunden und stimmen die *charakteristischen Impedanzen* beider Leitungen nicht überein, so wird ein Teil einer Welle am Grenzübergang reflektiert. Es pralle nun eine Welle aus der Leitung 1 auf die Leitung 2. Dann gelten die **Kontinuitätsgleichungen**:

$$\underline{u}_1^+(0) + \underline{u}_1^-(0) = \underline{u}_2^+(0) \tag{119}$$
$$\underline{i}_1^+(0) - \underline{i}_1^-(0) = \underline{i}_2^+(0) \tag{120}$$

Setzt man in (119) für die *Spannungen* die entsprechenden *Ströme* ein, welche sich mittels den *charakteristischen Impedanzen* ergeben, so wird daraus:

$$\underline{Z}_1 \cdot \left(\underline{i}_1^+(0) + \underline{i}_1^-(0)\right) = \underline{Z}_2 \cdot \underline{i}_2^+(0) \tag{121}$$

Löst man das so erhaltene Gleichungssystem auf, so ergibt sich:

$$\underline{i}_2^+(0) = \underline{T}_i \cdot \underline{i}_1^+(0), \quad \underline{u}_2^+(0) = \underline{T}_u \cdot \underline{u}_1^+(0) \tag{122}$$
$$\underline{i}_1^-(0) = \underline{\Gamma}_i \cdot \underline{i}_1^+(0), \quad \underline{u}_1^-(0) = \underline{\Gamma}_u \cdot \underline{u}_1^+(0) \tag{123}$$

Die beiden $\underline{T}$ heissen **Transmissionskoeffizienten**:

$$\underline{T}_i = \frac{2\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}, \quad \underline{T}_u = \frac{2\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \tag{124}$$

Der Wert $\underline{\Gamma} = \underline{\Gamma}_u = \underline{\Gamma}_i$ heisst **Reflexionskoeffizient**:

$$\underline{\Gamma} = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \tag{125}$$

Der *Reflexionskoeffizient* ist 1 für einen Leerlauf (keine angeschlossene Last) und -1 für einen Kurzschluss. Ausserdem gilt für die Koeffizienten:

$$T_u = 1 + \Gamma \tag{126}$$
$$T_i + \Gamma = 1 \tag{127}$$
$$T_S = T_U \cdot T_I = 1 - \Gamma^2 = 1 - \Gamma_S \tag{128}$$
$$T_S + \Gamma_S = 1 \tag{129}$$

Dabei sind T_S und Γ_S die *Transmissions-* und *Reflexionskoeffizienten* für die *Leistung*. Insofern entspricht (129) dem Satz der *Energieerhaltung*.

Phasengeschwindigkeit v_p

Die frequenzabhängige Ausbreitungsgeschwindigkeit eines Signals heisst *Phasengeschwindigkeit* oder **Dispersion** und ist gegeben durch:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \tag{130}$$

Gruppengeschwindigkeit v_g

Die *Gruppengeschwindigkeit*, mit welcher sich ein Wellenpaket auf einer *Leitung* übertragen lässt, ist gegeben durch:

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} \tag{131}$$

Verlustfreie Koaxialleitung

Für eine *verlustfreie Koaxialleitung* ergeben sich folgende *Leitungsbeläge*:

$$R' = 0, \quad G' = 0 \tag{132}$$

$$C' = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}, \quad L' = \frac{\mu}{2\pi}\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) \tag{133}$$

Für die *Fortpflanzungskonstante* $\underline{\gamma}$ gilt:

$$\underline{\gamma} = j\omega\sqrt{L'C'} = j\omega\sqrt{\varepsilon\mu} \tag{134}$$

Die *Phasengeschwindigkeit* beträgt:

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{135}$$

Für die *charakteristische Impedanz* $\underline{Z}_0$ ergibt sich:

$$\underline{Z}_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) \tag{136}$$

Freiraumwellenausbreitung

Ebene Wellen

Entkoppelt man die Maxwell-Gleichungen für das *Elektromagnetische Feld*, so bekommt man für das *elektrische Feld* $\underline{\vec{e}}$ und das magnetische Feld $\underline{\vec{h}}$:

$$\underline{\vec{e}} = \underline{e}_0 \cdot e^{-j\vec{k}\vec{r}}\hat{x} = \underline{\vec{e}}_0 \cdot e^{-j\beta z}\hat{x} \tag{137}$$

$$\underline{\vec{h}} = \underline{h}_0 \cdot e^{-j\vec{k}\vec{r}}\hat{y} = \underline{\vec{h}}_0 \cdot e^{-j\beta z}\hat{y} \tag{138}$$

Dabei sind mit $\hat{x}$ und $\hat{y}$ die Einheitsvektoren in x- und y-Richtung gemeint, die Welle als ganzes breitet sich räumlich in z-Richtung aus. Der Wert $\underline{k} = \beta - j\alpha$ heisst **Wellenzahl**, wobei β als **Ausbreitungskonstante** bezeichnet wird und ein Mass für die Geschwindigkeit v darstellt. Da bei uns $\alpha = 0$ ist, ist die *Wellenzahl* reell und es gilt:

$$k = \beta = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}{c} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{139}$$

Die Amplituden der beiden Felder stehen immer in einem bestimmten materialabhängigen Verhältnis zueinander, welches **Wellenimpedanz** Z_w heisst:

$$Z_w = \frac{\underline{e}_0}{\underline{h}_0} = \sqrt{\frac{\mu_0\mu_r}{\varepsilon_0\varepsilon_r}} \tag{140}$$

Eine sich so ausbreitende Welle kann auch durch den **Poynting-Vektor** $\underline{\vec{s}}$ ausgedrückt werden

$$\underline{\vec{s}} = \underline{\vec{e}} \times \underline{\vec{h}} = \underline{e}_0 \cdot \underline{h}_0 \cdot \hat{z} = \underline{s}_0 \cdot \hat{z} \tag{141}$$

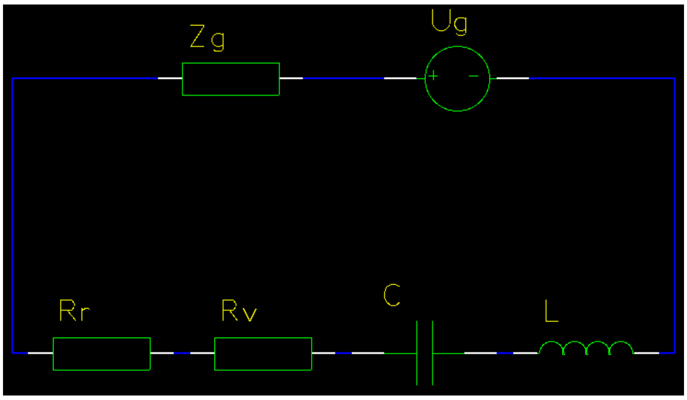


Abbildung 24: Ersatzschaltung einer Antenne

Reflexion und Transmission

Senkrechter Einfall

Trifft eine einfallende Welle (Index i) auf ein anderes Medium, so wird ein Teil der Welle reflektiert (Index r) und der andere Teil ins zweite Medium transmittiert (Index t). Das Verhältnis der Amplituden des reflektierten und einfallenden Feldes heisst **Reflexionsfaktor** Γ. Seien Z_{w1} und Z_{w2} die *Wellenimpedanzen* des ersten bzw. des zweiten Mediums, dann gilt:

$$\Gamma = \frac{\underline{e}_0^r}{\underline{e}_0^i} = \frac{\underline{h}_0^r}{\underline{h}_0^i} = \frac{Z_{w2} - Z_{w1}}{Z_{w2} + Z_{w1}} \tag{142}$$

Analog heisst das Verhältnis zwischen transmittiertem und einfallenden Feld **Transmissionsfaktor** T und es gilt:

$$T_e = \frac{\underline{e}_0^t}{\underline{e}_0^i} = \frac{2Z_{w2}}{Z_{w2} + Z_{w1}} \tag{143}$$

$$T_h = \frac{\underline{h}_0^t}{\underline{h}_0^i} = \frac{2Z_{w1}}{Z_{w2} + Z_{w1}} \tag{144}$$

Der *Reflexionsfaktor* ist für beide Felder gleich, während sich der *Transmissionsfaktor* unterscheidet.

Schiefer Einfall

Trifft die einfallende Welle schief mit Winkel φ_i auf das zweite Medium, so wird die rekflektierende Welle mit gleichem Ausfallswinkel $\varphi_r = \varphi_i$ zurückgeworfen und die transmittierende mit Winkel φ_t gebrochen, wobei gilt:

$$\frac{\sin\varphi_i}{\sin\varphi_t} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{k_2}{k_1} = \sqrt{\frac{\mu_2\varepsilon_2}{\mu_1\varepsilon_1}} \tag{145}$$

Ist $\mu_r = 1$ und das Material verlustlos, so tritt ab dem Winkel $\varphi_{i,krit}$ **Totalreflexion** auf und es wird nichts transmittiert. Mit $n = \sqrt{\varepsilon_r}$ gilt dann:

$$\sin\varphi_{i,krit} = \frac{n_2}{n_1} \tag{146}$$

Antennen

Knickt man eine Zweidrahtleitung in der Mitte senkrecht ab und bringt eine *Spannung* an, so betragen die *Ströme* an den Enden der Knicke Null und und zwischen den Enden und den Knickstellen entsteht eine *Stromverteilung* und der

Draht strahlt eine Welle ab.
Das Ersatzschaltbild einer *Antenne* ist in Abbildung 24 angegeben. Dabei modellieren Z_g und U_g den Generator, R_r den Verlust durch die Abstrahlung der Welle und R_v den Verlust durch den Leiter.

Strahlungsintensität $|\underline{\vec{s}}|$

Die *Strahlungsintensität* einer *Antenne* gibt die *Leistung* pro Flächeneinheit auf der Kugel durch den Speisungsmittelpunkt mit Radius r an und entspricht dem Betrag des *Poynting-Vektors* $\underline{\vec{s}}$. Die gesamte **Abstrahlung** einer *Antenne* S_{tot} ist gegeben durch:

$$S_{tot} = \frac{1}{2} \iint_S |\underline{\vec{s}}| \cdot dF \qquad (147)$$

Für einen Kugelstrahler gilt zudem:

$$|\underline{\vec{s}}| = \frac{S_{tot}}{4\pi r^2} \qquad (148)$$

Richtfaktor D_{max}

Um die Abstrahlung verschiedener *Antennen* miteinander vergleichen zu können, definiert man den *Richfaktor* D als Verhältnis zwischen der maximalen Strahlungsdichte der *Antenne* und jener eines Kugelstrahlers:

$$D_{max} = \frac{|\underline{\vec{s}}|_{\text{max}}}{|\underline{\vec{s}}|_{\text{Kugel}}} \qquad (149)$$

Antennenwirkungsgrad η

Der *Antennenwirkungsgrad* η ist das Verhältnis zwischen abgestrahlter und eingespiesener Leistung (S_{in}):

$$\eta = \frac{S_{tot}}{S_{in}} \qquad (150)$$

Antennengewinn G

Der *Antennengewinn* G gibt an, wie gross die maximale Signalstärke ist und in welche Richtung relativ zur *Antenne* diese zeigt. Er ist gegeben durch:

$$G = \eta \cdot D_{max} \qquad (151)$$

Nahfeld und Fernfeld

Den Abstrahlungsbereich einer *Antenne* kann man grob in zwei Regionen unterteilen: In das *Nahfeld* ($r < \frac{2D}{\lambda}$) und das *Fernfeld* ($r > \frac{2D}{\lambda}$). In letzterem Fall kann die *Antenne* idealisiert als punktförmige Strahlungsquelle angesehen werden.